

等比数列求和与通项求法

一、等比数列求和

🔔 等比数列求和公式

当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$,

两边同乘 q , 得:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n,$$

两式相减, 得

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

从而得出

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} (q \neq 1).$$

综上, 我们得到了等比数列的前 n 项和公式:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & q \neq 1 \end{cases}$$

🔔 等比数列和的性质

1、对于公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列, 记 S_n 为其前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍是等比数列, 且公比为 q^n .

2、 $S_{2n} = (1 + q^n)S_n$.

1. 典型例题

🔔 考察等比数列求和公式

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前10项和等于().

A. $-6(1 - 3^{-10})$

B. $\frac{1}{9}(1 - 3^{-10})$

C. $3(1 - 3^{-10})$

D. $3(1 + 3^{-10})$

【答案】 C

【解析】 $\because 3a_{n+1} + a_n = 0$,

$$\therefore a_1 = 2, a_n = 64$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{2 - 64q}{1 - q} = 126$$

解得 $q = 2$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\text{即 } 2^n = 64$$

$$n = 6$$

【标注】【知识点】等比数列角标和性质的应用；等比数列求和问题；求等比数列的基本量

【素养】数学运算

备注：2018-2019学年10月天津滨海新区南开中学滨海生态城学校高二上学期月考第15题11分

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $S_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$ 等于()

A. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$

B. $\frac{1}{5}(1 - 2^{4n})$

C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

D. $\frac{1}{3}(1 - 2^n)$

【答案】 B

【解析】 解：在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$,

可得 $a_n = 2^{n-1}$,

$$S_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$$

$$= 1 - 4 + 16 - 64 + \dots + 4^{2n-2} - 4^{2n-1}$$

$$= \frac{1 - (-4)^{2n}}{1 - (-4)} = \frac{1}{5}(1 - 4^{2n}) = \frac{1}{5}(1 - 2^{4n}).$$

故选：B.

【标注】【知识点】通项公式；分组法求和；等比数列求和问题

备注：2019-2020学年10月天津和平区天津市第二南开学校高二上学期月考第10题3分

5. $1, 1 + 2, 1 + 2 + 2^2, \dots, 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + \dots$ 的前99项和是().

A. $2^{100} - 101$

B. $2^{99} - 101$

C. $2^{100} - 99$

D. $2^{99} - 99$

【答案】 A

【解析】 A

2. 巩固练习

考察等比数列求和公式

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 + a_4 = 9$, $a_2 \cdot a_3 = 8$, 则数列的前2019项和 $S_{2019} = (\quad)$.

A. 2^{2019}

B. $2^{2018} - 1$

C. $2^{2019} - 1$

D. $2^{2020} - 1$

【答案】 C

【解析】 由等比数列的性质, 可得 $a_1 a_4 = a_2 a_3 = 8$,

又 $a_1 + a_4 = 9$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增的,

所以 $a_1 = 1$, $a_4 = 8$,

即 $q = 2$,

$$\text{则 } S_{2019} = \frac{1 \times (1 - 2^{2019})}{1 - 2} = 2^{2019} - 1.$$

故选C.

【标注】 【知识点】等比数列求和问题

备注: 2019-2020学年9月天津河北区天津市第二中学高二上学期月考第7题5分

9. 设 $S_n = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10} (n \in \mathbf{N}_+)$, 则 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2^{3n+13} - 2}{7}$

【解析】 $\{a_n\}$ 为首项为2, 公比为 2^3 的等比数列.

S_n 是对其前 $n + 4$ 项求和:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2(1 - 8^{n+4})}{1 - 8} \\ &= \frac{2(8^{n+4} - 1)}{7} \\ &= \frac{2^{3n+13} - 2}{7}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】等比数列求和问题

备注: 2018-2019学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中(特长班)第13题4分

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = (\quad)$.

A. $(2^n - 1)^2$

B. $4^n - 1$

C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

D. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$

【答案】 C**【解析】** $\because S_n = 2^n - 1$,当 $n = 1$ 时, $S_1 = 2^1 - 1 = 1$ 即 $a_1 = 1$,当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$, $\therefore$ 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2^{1-1}$ 也满足,又 $\because a_n = 2^{n-1}$, $\therefore a_n^2 = 4^{n-1}$, $\therefore$ 数列 $\{a_n^2\}$ 是以 $a_1^2 = 1$ 为首项, 以 4 为公比的等比数列,

$$\therefore a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{1 \cdot (1 - 4^n)}{1 - 4} = \frac{1}{3}(4^n - 1).$$

故选 C.

【标注】 【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 等比数列求和问题

备注: 2019-2020 学年天津和平区高二上学期期中第 6 题 3 分

11. 回答下面问题.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_n = 189$, $q = 2$, $a_n = 96$, 求 a_1 和 n .**【答案】** (1) $a_1 = 3$, $n = 6$.**【解析】** (1) 由 $S_n = 189$, $q = 2$, $a_n = 96$,

$$\frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = 189, a_1 \times 2^{n-1} = 96,$$

$$\therefore 192 - a_1 = 189,$$

$$\text{解得 } a_1 = 3, n = 6.$$

【标注】 【知识点】等比数列求和问题; 等比数列的性质及应用

备注: 2018-2019 学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第 17 题 13 分

 考察求和公式的性质12. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则公比 $q = \underline{\hspace{2cm}}$.**【答案】** $-\frac{1}{2}$

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等比数列，

$$\begin{aligned}\therefore \frac{S_{10}}{S_5} &= \frac{S_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{S_5} \\&= \frac{S_5 + q^5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}{S_5} \\&= \frac{(1 + q^5)S_5}{S_5} = 1 + q^5 = \frac{31}{32}, \\ \therefore q^5 &= -\frac{1}{32}, \therefore q = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列前 n 项和公式；等比数列求通项问题

备注：2018-2019学年11月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考理科第13题4分

13. 等比数列前 n 项和为54，前 $2n$ 项和为60，则前 $3n$ 项和为（ ）.

A. 54

B. 64

C. $66\frac{2}{3}$

D. $60\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】 $\because$ 等比数列前 n 项和为54，前 $2n$ 项和为60，

$\therefore$ 第二个 n 项的和是6，

$\therefore$ 三个 n 项的和是 $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$

故前 $3n$ 项和为 $60\frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】等比数列求和问题

备注：2018-2019学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中（特长班）第5题4分

二、通项求法-累加法

累加法模型

将递推公式变形为 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ，对 n 进行连续赋值，可以得到：

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1),$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2),$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = f(n-3),$$

.....

$$a_3 - a_2 = f(2),$$

$$a_2 - a_1 = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加，得到：

左边：

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_n - a_1$$

右边：

$$f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\text{故 } a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

1. 典型例题

等差数列可求和

14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{n^2 + n}{2}$

【解析】 $\because a_{n+1} - a_n = n + 1,$

$$a_n - a_{n-1} = n,$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = n - 1,$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = n - 2,$$

.....

$$a_3 - a_2 = 3,$$

$$a_2 - a_1 = 2,$$

$$\therefore \text{累加为 } a_n - a_1 = 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$= \frac{(2+n)(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2},$$

$$\therefore a_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

【标注】【知识点】递推数列与递推方法

备注：2018-2019学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第12题

等比数列可求和

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^{n-1}$ 。求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

【解析】 略 .

【标注】 【素养】 数学运算

 裂项可求和

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n = (\quad)$.

A. $2 + n \ln n$

B. $2n + (n-1) \ln n$

C. $2n + n \ln n$

D. $1 + n + n \ln n$

【答案】 C

【解析】 $\because \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,
 $\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$,
 $\therefore \frac{a_n}{n} = a_1 + \left(\frac{a_2}{2} - a_1\right) + \left(\frac{a_3}{3} - \frac{a_2}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1}\right) = 2 + \ln$
 $\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}\right) = 2 + \ln n$, 则 $a_n = 2n + n \ln n$.
故选 C.

【标注】 【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

备注：2019-2020学年天津东丽区一百中学高二上学期期中第7题4分

17. 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 则这个数列的通项是 _____ .

【答案】 $\frac{2n^2 - 1}{2n^2 + 2n}$

【解析】 $\because a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+2)}$,
 $\therefore a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$,
 $\therefore a_1 = \frac{1}{4}$,
 $a_2 - a_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$
 $a_3 - a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$
 $a_4 - a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$

$$a_5 - a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$$

·
·
·
·
·
·

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

上边 n 个式子相加, 得

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2-1}{2n^2+2n}$$

$$\therefore a_n = \frac{2n^2-1}{2n^2+2n}.$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

18. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项是 _____.

【答案】 $a_n = \sqrt{n}$

【解析】 $\because a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$
 $\therefore a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$

$$\therefore a_1 = 1,$$

$$a_2 - a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1},$$

$$a_3 - a_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

$$a_4 - a_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3},$$

·

$$a_n - a_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1},$$

以上 n 个式子相加, 得

$$a_n = 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= 1 + (\sqrt{n} - \sqrt{1})$$

$$= \sqrt{n} .$$

$$\therefore a_n = \sqrt{n} .$$

故答案为： $a_n = \sqrt{n}$.

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

教法备注：此处可以结合例题给学生总结一下我们常见的 $\sum f(i)$ 可求的情形。

2. 巩固练习

等差数列可求和

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 () .

A. $a_n = n - 1$

B. $a_n = (n - 1)^2$

C. $a_n = (n - 1)^3$

D. $a_n = (n - 1)^4$

【答案】 B

【解析】 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$,

$$\text{所以 } a_{n+1} - a_n = 2n - 1 ,$$

$$\text{整理得 } a_n - a_{n-1} = 2(n-1) - 1 ,$$

$\cdots ,$

$$a_2 - a_1 = 2 \cdot 1 - 1 ,$$

$$\text{所以 } a_n - a_1 = 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) - (n - 1) ,$$

$$\text{整理得 } a_n = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) ,$$

$$\text{即 : } a_n = (n-1)^2 .$$

故选B .

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

备注：2019-2020学年天津滨海新区天津开发区第一中学高二上学期期中第7题3分

等比数列可求和

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} (n \geq 2)$, 求 a_n .

【答案】 $\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$.

【解析】方法一： $\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$.

方法二：由题意知： $-4(1+5+\cdots 5^{n-2})$, $a_3 - a_2 = 3^2$, ... ,

$$a_n - a_{n-1} = 3^{n-1} ,$$

各式两边分别相加得： $a_n - a_1 = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{2}$,

于是 $a_n = \frac{3^n - 1}{2} (n \geq 2)$, 此式对 $n = 1$ 也成立 , 故 $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【标注】【素养】数学运算

裂项可求和

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n = ()$.

A. $2 + \ln n$

B. $2 + (n-1) \ln n$

C. $2 + n \ln n$

D. $1 + n + \ln n$

【答案】A

【解析】方法一：由 $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 得 $a_{n+1} - a_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

则当 $n \geq 2$ 时 , $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$= 2 + (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln n - \ln(n-1)] = 2 + \ln n$, 当 $a_1 = 2$ 时 , 此式也成立 .

方法二： $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \ln(n+1) - \ln n$, 即

$$a_{n+1} - a_n = \ln(n+1) - \ln n ,$$

$$a_n - a_{n-1} = \ln n - \ln(n-1) , \cdots , a_2 - a_1 = \ln 2 - \ln 1 ,$$

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 ,$$

将其相加得到 $a_n = \ln n + a_1 = 2 + \ln n (n \geq 2)$,

此式对 $n = 1$ 也成立 , $\therefore a_n = 2 + \ln n$.

方法三： $\because a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时 ,

$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} - \cdots + a_2 - a_1 + a_1$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n-2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + 2$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1}\right) + 2$$

$$= 2 + \ln n ,$$

又 $\because 2 + \ln 1 = 2 = a_1$, $\therefore a_n = 2 + \ln n (n \in \mathbf{N}^*)$.

故选A .

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

备注：2017-2018学年12月天津和平区天津市耀华中学高三上学月月考文科第4题4分

22. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$, 那么这个数列的通项公式是 _____ .

【答案】 $\frac{6n-1}{n}$

【解析】 因为 $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{所以 } a_2 = a_1 + 1 - \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\text{同理可得, } a_4 = a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

...

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\text{以上 } n-1 \text{ 个式子相加得, } a_n = a_1 + 1 - \frac{1}{n} = \frac{6n-1}{n}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{6n-1}{n}.$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

三、通项求法-累乘法

累乘法模型

将递推公式变形为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$, 对 n 进行连续赋值, 可以得到:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1),$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2),$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = f(n-3),$$

.....

$$\frac{a_3}{a_2} = f(2),$$

$$\frac{a_2}{a_1} = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加, 得到:

左边:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_1}.$$

右边：

$$f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots f(2) \cdot f(1) = \prod_{i=1}^{n-1} f(i).$$

$$\text{故 } \frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\prod_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

1. 典型例题

考察常见累乘法模型

23. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ ，($n \in \mathbf{N}^*$)，则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $2n$

【解析】 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$ ，
 $n \geq 2$ 时， $a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}}$
 $= 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}$
 $= 2n$ ，

经检验 $n=1$ 时 $a_1 = 2$ 符合上式，

$$\therefore a_n = 2n (n \in \mathbf{N}^*).$$

故答案为： $2n$ 。

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

备注：2018-2019学年10月天津南开区天津市第二十五中学高二上学期月考第13题3分

24. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $(n+3)a_{n+1} - na_n = 0$ ($n \in \mathbf{N}_+$)，求 a_n 。

【答案】 $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ 。

【标注】 【素养】数学运算

25. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{n^2}{n^2-1} a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)，则数列 $\left\{ \frac{a_n}{n^2} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$
 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{2n}{n+1}$

【解析】 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n^2}{n^2-1}a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

可得 $\frac{a_n}{n^2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{a_{n-1}}{(n-1)^2} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $\frac{a_n}{n^2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdots \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1}{1^2}$

$= \frac{2a_1}{(n+1)n} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

又 $a_1 = 1$, $\frac{a_n}{n^2} = \frac{2}{(n+1)n} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

又当 $n = 1$, $a_1 = 1$ 也满足上式,

$\therefore \frac{a_n}{n^2} = \frac{2}{(n+1)n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$,

则前 n 项和 $T_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{2n}{n+1}$.

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题；裂项相消法求和

26. 设 $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = \frac{1}{n}$.

【标注】 【思想】转化化归思想

【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【方法】累加法

2. 巩固练习

27. 数列 $\{a_n\}$ 中已知 $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

【标注】 【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【方法】累乘法