

等比数列求和与通项求法

一、等比数列求和

🔗 等比数列求和公式

当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$,

两边同乘 q , 得:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n,$$

两式相减, 得

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n.$$

从而得出

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} (q \neq 1).$$

综上, 我们得到了等比数列的前 n 项和公式:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & q \neq 1 \end{cases}$$

🔗 等比数列和的性质

1、对于公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列, 记 S_n 为其前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍是等比数列, 且公比为 q^n .

2、 $S_{2n} = (1 + q^n)S_n$.

1. 典型例题

🔗 考察等比数列求和公式

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前10项和等于().

A. $-6(1 - 3^{-10})$

B. $\frac{1}{9}(1 - 3^{-10})$

C. $3(1 - 3^{-10})$

D. $3(1 + 3^{-10})$

2. 设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10} (n \in \mathbf{N})$, 则 $f(n)$ 等于().

A. $\frac{2}{7}(8^n - 1)$

B. $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$

C. $\frac{2}{7}(8^{n+3} - 1)$

D. $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中, a_1 最小, 且 $a_1 + a_n = 66, a_2 a_{n-1} = 128$, 前 n 项和 $S_n = 126$, 求 n 和公比 q .
4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n, S_n = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$ 等于()
- A. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$ B. $\frac{1}{5}(1 - 2^{4n})$
C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ D. $\frac{1}{3}(1 - 2^n)$
5. $1, 1 + 2, 1 + 2 + 2^2, \dots, 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + \dots$ 的前99项和是() .
- A. $2^{100} - 101$ B. $2^{99} - 101$
C. $2^{100} - 99$ D. $2^{99} - 99$

考察求和公式的性质

6. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3 = S_6$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前5项和为() .
- A. $\frac{15}{8}$ 或5 B. $\frac{31}{16}$ 或5
C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{8}$
7. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_8}{S_4} = 3$, 则 $\frac{S_{16}}{S_4} = ()$.
- A. 3 B. 7 C. 10 D. 15

2. 巩固练习

考察等比数列求和公式

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 + a_4 = 9, a_2 \cdot a_3 = 8$, 则数列的前2019项和 $S_{2019} = ()$.
- A. 2^{2019} B. $2^{2018} - 1$
C. $2^{2019} - 1$ D. $2^{2020} - 1$
9. 设 $S_n = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10} (n \in \mathbf{N}_+)$, 则 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = ()$.
- A. $(2^n - 1)^2$ B. $4^n - 1$
C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ D. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$
11. 回答下面问题 .

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_n = 189, q = 2, a_n = 96$, 求 a_1 和 n .

考察求和公式的性质

12. 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$ ，前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$ ，则公比 $q =$ _____.

13. 等比数列前 n 项和为54，前 $2n$ 项和为60，则前 $3n$ 项和为() .

A. 54

B. 64

C. $66\frac{2}{3}$

D. $60\frac{2}{3}$

二、通项求法-累加法

累加法模型

将递推公式变形为 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ，对 n 进行连续赋值，可以得到：

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1),$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2),$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = f(n-3),$$

.....

$$a_3 - a_2 = f(2),$$

$$a_2 - a_1 = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加，得到：

左边：

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_n - a_1$$

右边：

$$f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\text{故 } a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

1. 典型例题

等差数列可求和

14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

等比数列可求和

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^{n-1}$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

裂项可求和

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n = ()$.
- A. $2 + n \ln n$ B. $2n + (n-1) \ln n$
C. $2n + n \ln n$ D. $1 + n + n \ln n$
17. 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 则这个数列的通项是 _____.
18. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 则 $\{a_n\}$ 的通项是 _____.

2. 巩固练习

等差数列可求和

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 ().
- A. $a_n = n - 1$ B. $a_n = (n-1)^2$
C. $a_n = (n-1)^3$ D. $a_n = (n-1)^4$

等比数列可求和

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1} (n \geq 2)$, 求 a_n .

裂项可求和

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n = ()$.
- A. $2 + \ln n$ B. $2 + (n-1) \ln n$
C. $2 + n \ln n$ D. $1 + n + \ln n$
22. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$, 那么这个数列的通项公式是 _____.

三、通项求法-累乘法

累乘法模型

将递推公式变形为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$, 对 n 进行连续赋值, 可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= f(n-1), \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} &= f(n-2), \\ \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} &= f(n-3), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = f(2),$$

$$\frac{a_2}{a_1} = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加, 得到:

左边:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_1}.$$

右边:

$$f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots f(2) \cdot f(1) = \prod_{i=1}^{n-1} f(i).$$

$$\text{故 } \frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\prod_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出, 那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

1. 典型例题

 考察常见累乘法模型

23. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$, ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, $(n+3)a_{n+1} - na_n = 0$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 求 a_n .

25. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n^2}{n^2-1} a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

26. 设 $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. 巩固练习

27. 数列 $\{a_n\}$ 中已知 $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.