

等比数列

一、等差数列求和公式

🔔 等差数列求和公式

对于公差为 d 的等差数列，我们用两种方式表示 S_n ：

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \text{①}$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \text{②}$$

①+②得：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

由此可得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

如果带入等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， S_n 也可以用首项 a_1 与公差 d 表示，即：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

🔔 等差数列和的性质

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和公式为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n 则有

(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 也成等差数列，公差为 n^2d 。

(2) 若 $S_p = S_q (p \neq q)$ ，则 $S_{p+q} = 0$ 。

(3) 若 $S_p = q, S_q = p (p \neq q)$ ，则 $S_{p+q} = -(p+q)$ 。

(4) 若项数为奇数，则有 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$ 或者可以写成 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ 。

(5) 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 仍为等差数列，且公差为 $\{a_n\}$ 公差的一半。

$$(6) \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}.$$

(7) 数列 $\{a_n\}$ 总共有 $2n+1$ 项，则有 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n}{n+1}$ 。

🔔 等差数列和的最值

🔔 方法一

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{d}{2} \left[n - \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} \right) \right]^2 - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} \right)^2$$

🔔 方法二

我们就等差数列的两个基本量，分四种情况去讨论一下：

(1) $a_1 > 0, d \geq 0$. 此时通过通项公式分析可知, $a_n > 0$ 恒成立, 故 S_n 单调递增, 当且仅当 $n = 1$ 时, $S_n = S_1 = a_1$ 最小, 无最大值.

(2) $a_1 < 0, d \leq 0$. 此时通过通项公式分析可知, $a_n < 0$ 恒成立, 故 S_n 单调递减, 当且仅当 $n = 1$ 时, $S_n = S_1 = a_1$ 最大, 无最小值.

(3) $a_1 > 0, d < 0$. 此时通过通项公式分析可知 a_n 单调递减, 故当找到正整数 m 满足 $\begin{cases} a_m \geq 0 \\ a_{m+1} \leq 0 \end{cases}$ 时, S_m 是最大值, 而 m 的数值通过不等式组确定.

(4) $a_1 < 0, d > 0$. 此时通过通项公式分析可知 a_n 单调递增, 故当找到正整数 m 满足 $\begin{cases} a_m \leq 0 \\ a_{m+1} \geq 0 \end{cases}$ 时, S_m 是最小值, 而 m 的数值通过不等式组确定.

1. 典型例题

考察求和公式

- 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7 = 14$, $S_{10} = 13$, 则 $S_{17} = (\quad)$.
A. 27 B. 0 C. $\frac{32}{3}$ D. $-\frac{17}{3}$
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{m-1} = -3$, $S_m = 0$, $S_{m+1} = 4$, $m = (\quad)$.
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
- 递减的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_3 \cdot a_5 = 63$, $a_2 + a_6 = 16$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
(2) 求 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$.

考察求和的性质

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d = \frac{1}{2}$, 前 100 项的和 $S_{100} = 45$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , T_n , 若对任意自然数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-3}{4n-3}$, 则 $\frac{a_9}{b_5 + b_7} + \frac{a_3}{b_8 + b_4} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_6}{S_{12}} = (\quad)$.
A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{6}{11}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{27}{77}$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -2015$, 其前 n 项的和为 S_n , 若 $\frac{S_{2007}}{2007} - \frac{S_{2005}}{2005} = 2$, 则 $S_{2015} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 等差数列共有 $2n + 1$ 项, 所有奇数项之和为 132, 所有偶数项之和为 120, 则 $n = (\quad)$.
A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

考察和的最值

9. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$. 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$; 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值时, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8 = 5a_{13}$, 且 $a_1 > 0$, S_n 为其前 n 项和, 则 S_n 中最大的是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 25$, $S_{17} = S_9$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其公差 $d < 0$, 其前 n 项和记为 S_n , 且 $S_{16} > 0$, $S_{17} < 0$, 则当 S_n 取最大值时的 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
13. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$, 且它们的前 n 项和 S_n 有最大值, 则使得 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为 ().
- A. 11 B. 19 C. 20 D. 21
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 < 0$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 0$, 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 当 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取最小值时, n 的值为 ().
- A. 48 B. 50 C. 48或50 D. 48或49

2. 巩固练习

考察求和公式

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 若 $a_2 + a_5 = 7$, $\frac{a_3}{3} + a_8 = 9$, 则 $S_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_5 = 50$, $S_n = 210$, $a_{n-2} = 20$, 则 $n = (\quad)$.
- A. 12 B. 14 C. 16 D. 18
17. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -60$, $a_{17} = -12$.
- (1) 该数列第几项起为正?
- (2) 求 $T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$.

考察求和的性质

18. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d = 2$, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 200$, 则 $a_5 + a_{10} + a_{15} + \cdots + a_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. 设 S_n , T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{4n+2}{2n-5}$, 则 $\frac{S_{19}}{T_{19}} = (\quad)$.
- A. $\frac{26}{11}$ B. $\frac{38}{13}$ C. $\frac{46}{17}$ D. $\frac{14}{5}$
20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10} = 20$, $S_{20} = 15$, 则 $S_{30} = (\quad)$.

A. 10

B. -30

C. -15

D. 25

21. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{S_n\}$ 是前 n 项和, $a_1 = -2010$, $\frac{S_{2014}}{2014} - \frac{S_{2011}}{2011} = 3$, 则 $a_2 =$ _____ .

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为377, 项数 n 为奇数, 且前 n 项和中奇数项和与偶数项和之比为7:6, 求中间项 _____ .

考察和的最值

23. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $-1 < \frac{a_7}{a_6} < 0$, 若它的前 n 项和 S_n 有最大值, 则当 $S_n > 0$ 时, n 的最大值为 () .

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

24. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 S_n 的最小值为 _____ .

二、 等比数列的定义与通项公式

等比数列定义

一般地, 如果一个数列从第2项起, 每一项与它的前一项的比值等于同一非零常数, 那么这个数列叫做**等比数列**, 这个常数叫做等比数列的**公比**, 公比通常用字母 $q (q \neq 0)$ 表示.

等比中项概念

与等差中项的概念类似, 如果在 a 与 b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**.

等比数列通项公式

因为在一个等比数列 $\{a_n\}$ 中, 从第2项起, 每一项与它的前一项的比都等于公比 q . 也就是说, 从第2项起, 每一项都等于它的前一项乘以公比 q . 于是有:

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

.....

由此得到等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

其中, a_1 与 q 均不为0.

等比数列的性质

1. $a_n = a_m q^{n-m}$.
2. $\{a_n\}$ 的单调性如下：
 - (1) 当 $q > 0$ 时，
 - ① 若 $a_1(q-1) > 0$ ，则 $\{a_n\}$ 是递增数列；
 - ② 若 $a_1(q-1) < 0$ ，则 $\{a_n\}$ 是递减数列；
 - ③ 若 $a_1(q-1) = 0$ ，即 $q = 1$ ，则 $\{a_n\}$ 是常数列，即 $a_n = a_1$.
 - (2) 当 $q < 0$ 时， $\{a_n\}$ 不单调，此时 $\{a_n\}$ 的各项数值在正负之间徘徊，我们称 $\{a_n\}$ 为摆动数列（或震荡数列），它的所有奇数项和偶数项（排列顺序不变）保持同号，但是彼此异号。
3. 当 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$) 时，有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ ；特别地，若 n 是 m 和 p 的等差中项时， a_n 是 a_m 和 a_p 的等比中项。
4. 对于非零常数 λ 和公比为 q' 的等比数列 $\{b_n\}$ ，有如下结论：
 - (1) $\{\lambda a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列， $\{\lambda b_n\}$ 是公比为 q' 的等比数列；
 - (2) $\{a_n b_n\}$ 是公比为 qq' 的等比数列， $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{q}{q'}$ 的等比数列。
 - (3) $\{|a_n|\}$ 是公比为 $|q|$ 的等比数列。
5. 每隔 k ($k \in \mathbf{N}^*$) 项取出一项，按照原来的顺序排列所得的数列仍然是等比数列，且公比为 q^{k+1} 。
6. 连续 k 项的和仍然构成等比数列，且公比为 q^k 。
7. 若 $a_n > 0$ ，则 $\{\log_a a_n\}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是等差数列，且公差为 $\log_a q$ 。

1. 典型例题

考察等比数列定义

25. 若 $x, 2x+2, 3x+3$ 是一个等比数列的连续三项，则 x 的值为 ()。
- A. -4 B. -1 C. 1或4 D. -1或-4
26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = ka_n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{R}^*$)，若数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列，则 k 值等于 ()。
- A. 1 B. -1 C. -2 D. 2

考察等比数列通项公式

27. 已知等比数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ， $a_2 + a_6 = 36$ ， $a_4 + a_7 = 18$ 。
- 求 a_n 。

考察等比数列性质

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 若 $a_1 + a_2 = 1$, $a_3 + a_4 = 2$, 则 $\log_2 \frac{a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014}}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.
29. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_5 a_6 + a_4 a_7 = 18$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 巩固练习

考察等比数列定义

30. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1 + 1$, $a_3 + 3$, $a_5 + 5$ 构成公比为 q 的等比数列, 则 $q = \underline{\hspace{2cm}}$.
31. 数列 $\{a_n\}$ 中, “ $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为等比数列”的().
- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

考察等比数列通项公式

32. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_4$, a_3 , $4a_5$ 成等差数列, 且 $a_3 = 2a_2^2$, 那么数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

考察等比数列性质

33. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $3a_1$, $\frac{1}{2}a_3$, $2a_2$ 成等差数列, 则 $\frac{a_{19} + a_{20}}{a_{17} + a_{18}} = ()$.
- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
34. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_2 = ()$.
- A. $\frac{1}{8}$
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2