

数列通项求法练习题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 1$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$, 且 b_1, b_2, b_4 成等比数列.

求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 依题意知: $a_n \neq 1$, 且 $a_n \neq 0$,

$$\therefore b_n = \frac{1}{a_n - 1}, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{a_n} - 1}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_n - 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{a_n - 1}$$

$$= 1 + b_n,$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为1的等差数列.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 等差数列的判定与证明问题; 等差数列求和问题; 数列与不等式综合

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 中的通项公式 a_n .

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \quad a_n = 1 + \frac{2}{2n - 7}.$$

【解析】(1) $\because a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

$\therefore n \geq 2$ 时,

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{a_{n-1}} - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = 1$$

$$\text{又 } b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = -\frac{5}{2},$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{5}{2}$ 为首项, 1 为公差的等差数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_n = -\frac{5}{2} + (n-1) = n - \frac{7}{2} = \frac{2n-7}{2},$$

$$\text{则 } a_n = 1 + \frac{1}{b_n} = 1 + \frac{2}{2n-7}.$$

【标注】【知识点】常见数列的通项公式；等差数列求通项问题；等差数列的判定与证明问题

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 1, n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1), n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

求证：数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是等差数列，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $b_n = n^2$.

【解析】 (1) 由 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$ 两边同除以 $n(n+1)$,

$$\text{得 } \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1,$$

从而数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为首项 $b_1 = 1$, 公差 $d = 1$ 的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{b_n}{n} = n,$$

从而数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n^2$.

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；递推数列与递推方法；数列与不等式综合

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ().

A. $a_n = 2n + 1$

B. $a_n = 4n - 1$

C. $a_n = 2^n + 1$

D. $a_n = 2^{n-1} + 2$

【答案】 C

【解析】 由 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 得: $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 1\}$ 是以 $a_1 - 1 = 2$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

$$\therefore a_n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\therefore a_n = 2^n + 1.$$

故选 C.

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；通项公式

5. 知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

求证：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) 证明见解析，

通项公式为： $a_n = 3^n - 1$.

【解析】 (1) $\because a_{n+1} = 3a_n + 2$,

$$\therefore a_{n+1} = 3(a_n + 1),$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 3,$$

$\therefore \{a_n + 1\}$ 是以首项 $a_1 + 1 = 3$ ，公比为3的等比数列，

$$\therefore a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n,$$

$$\therefore a_n = 3^n - 1.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等比数列的判定与证明；错位相减法求和

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$, $a_1 = 2$.

证明：数列 $\{a_n - n\}$ 是一个等比数列.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because a_{n+1} = 2a_n - n + 1$,

$$\therefore \frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = \frac{2a_n - n + 1 - (n+1)}{a_n - n} = \frac{2a_n - 2n}{a_n - n} = 2,$$

又 $a_1 = 2$,

$\therefore \{a_n - n\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列.

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明；分组法求和

7. 已知：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

求证：数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列.

【答案】 (1) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$,

$$\therefore a_{n+1} - (n+1) = 4(a_n - n),$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = 4,$$

$\therefore \{a_n - n\}$ 是公比为4，首项为1的等比数列.

【标注】【知识点】数列与不等式综合；分组法求和；数列的函数特性；等比数列的判定与证明；比较法

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ ．求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式_____．

【答案】 $a_n = 3^n - 2^n$

【解析】 $\because a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ ．

$$\text{则 } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \cdot$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{3^n} \cdot$$

$$\text{则 } b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{3} \cdot$$

$$\therefore (b_{n+1} - 1) = \frac{2}{3} (b_n - 1) \cdot$$

$$\therefore \frac{b_{n+1} - 1}{b_n - 1} = \frac{2}{3} \cdot$$

$$\text{又有 } b_1 - 1 = \frac{a_1}{3^1} - 1 = -\frac{2}{3} \cdot$$

$\therefore \{b_n - 1\}$ 是以 $-\frac{2}{3}$ 为首项，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列．

$$\therefore b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot$$

$$\therefore b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \cdot$$

$$\therefore a_n = 3^n \cdot b_n = 3^n - 2^n \cdot$$

【标注】【知识点】等比数列的概念与通项公式

【知识点】常见数列的通项公式

【素养】数学运算

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ ($n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$)

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列．

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

【答案】 (1) 证明见解析．

$$(2) a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot 2^n \cdot$$

【解析】 (1) $\because a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ ($n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$)，

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \cdot,$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1 \cdot,$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{数列 } \frac{a_n}{2^n} \text{ 是以 } \frac{1}{2} \text{ 为首项, } 1 \text{ 为公差的等差数列.} \\ (2) \text{ 由 (1) 得 } \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{2} + (n-1) \cdot 1 = n - \frac{1}{2}, \\ \therefore a_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot 2^n. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；等差数列的判定（涉及新数列构造）

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) a_n = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{(-1)^n}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$$

【解析】(1) $\because a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2},$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} (n \geq 2),$$

$$\text{而 } a_1 = 1, a_2 = 2,$$

$$\therefore a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{2},$$

而要证 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 为等比数列,

$$\therefore \text{考虑 } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{\frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } b_1 = 1,$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以1为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \in \mathbf{N}_+),$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 \\ = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^0, \end{aligned}$$

$$\text{即 } a_n - a_1 = 1 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{(-1)^n}{2^n}, n \geq 2,$$

当 $n = 1, a_1 = 1$, 也符合上式,

$$\therefore a_n = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{(-1)^n}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$$

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明；利用累加法求数列通项公式问题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$

证明：数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【答案】 (1) 见解析。

【解析】 (1) $\because a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}),$$

$$\because a_1 = 1, a_2 = 3,$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = 2 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2),$$

$\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1$ 为首项，2为公比的等比数列，

$$\text{则 } a_{n+1} - a_n = 2^n,$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】通项公式；裂项相消法求和；等比数列的判定与证明

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n}, b_n = \frac{1}{a_n} - 1.$

证明数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，并求通项公式 b_n 。

【答案】 (1) 证明见解析； $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】 (1) $\because a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n},$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 - a_n}{a_n} = \frac{2}{a_n} - 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = 2 \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1} - 1 = 2$ 为首项，以 $q = 2$ 为公比的等比数列。

即 $\{b_n\}$ 为等比数列，

$$\therefore b_n = \frac{1}{a_n} - 1 = 2^n (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】分组法求和；等比数列的判定与证明

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$.

【解析】 $\because a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$,

两边同时取倒数,

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = \frac{2}{a_n} + 1.$$

$$\text{令 } b_n = \frac{1}{a_n},$$

$$\text{则 } b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1),$$

$$\text{即 } \frac{b_{n+1} + 1}{b_n + 1} = 2.$$

$\therefore \{b_n + 1\}$ 是以 $b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 2$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

$$\therefore b_n + 1 = 2^n,$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

$$\text{故答案为: } a_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

【标注】 【知识点】 常见数列的通项公式

14. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n = n^2 + 3n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项为 _____.

【答案】 $2n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解析】 当 $n \geq 2$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n) - [(n-1)^2 + 3(n-1)]$$

$$= n^2 + 3n - (n^2 - 2n + 1 + 3n - 3)$$

$$= 2n + 2,$$

又 $S_1 = a_1 = 1^2 + 3 = 4$, 满足此通项公式,

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【标注】 【知识点】 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2^{n+1} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $b_n = \log_4 a_n$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_n = 2^{2n-1}$.

【解析】(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2^{n+1} - 3$,

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} = 2^n - 3,$$

两式相减得 $\frac{a_n}{2^{n-1}} = 2^n$,

即 $a_n = 2^{2n-1}$, 且上式对于 $n = 1$ 也成立,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{2n-1}$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 等比数列求通项问题

16. 数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是其前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}S_n (n \geq 1)$, 则 $a_n =$ _____.

【答案】
$$\begin{cases} 1, n = 1 \\ \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

【解析】由 $a_{n+1} = \frac{1}{3}S_n$,

$$\text{得 } a_n = \frac{1}{3}S_{n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{两式相减得 } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}a_n,$$

$$\text{即 } a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n (n \geq 2),$$

$$\text{又 } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 中各项均不为 0, 且从第二项起构成公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2},$$

$$n = 1 \text{ 时, } a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 1, n = 1 \\ \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} 1, n = 1 \\ \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

【标注】【知识点】数列的前 n 项和; 利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n+1}{2}a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

【答案】(1)
$$a_n = \begin{cases} 1, n = 1 \\ \frac{2}{n} \cdot 3^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

【解析】(1) 因为 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n+1}{2}a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = \frac{n}{2}a_n (n \geq 2)$,

两式相减得 $na_n = \frac{n+1}{2}a_{n+1} - \frac{n}{2}a_n$,

所以 $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = 3 (n \geq 2)$,

因此数列 $\{na_n\}$ 从第二项起, 是以2为首项, 以3为公比的等比数列,

所以 $na_n = 2 \cdot 3^{n-2} (n \geq 2)$,

故 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{2}{n} \cdot 3^{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和; 数列与不等式综合; 等比数列求通项问题

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7, n \in \mathbf{N}^*$.

证明: 数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = 3a_1 - 3$,

$\therefore a_1 = 3$.

当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = 3a_n + 4n - 7$,

$2S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4(n-1) - 7$,

$\therefore 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1} + 4$, 即 $a_n = 3a_{n-1} - 4$.

从而 $a_n - 2 = 3(a_{n-1} - 2)$, 即 $\frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = 3$.

又 $a_1 - 2 = 1$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ 是以1为首项, 3为公比的等比数列.

【标注】【知识点】裂项相消法求和

19. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 为 S_n , 已知 $a_1 = 1, (2n-1)a_{n+1} = (2n+3)S_n$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

证明: 数列 $\left\{ \frac{S_n}{2n-1} \right\}$ 是等比数列.

【答案】(1) 证明见解析.

【解析】(1) $\therefore a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{2n+3}{2n-1}S_n$,

$\therefore S_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n-1}S_n$,

$\therefore \frac{S_{n+1}}{2n+1} = 2 \cdot \frac{S_n}{2n-1}$, 又 $a_1 = 1$,

$$\therefore \frac{S_1}{1} = 1 \neq 0,$$

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{S_n}{2n-1} \right\} \text{是以1为首项,2为公比的等比数列}.$$

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明；错位相减法求和

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 若 $b_n = a_{2n-1} - \frac{1}{3}$, 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列并求其通项公式.
 (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $b_n = \frac{2}{3} \times 4^{n-1}$.
 (2) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n - 1), & (n = 2k) \\ \frac{1}{3}(2^n + 1), & (n = 2k - 1) \end{cases}$.

【解析】 (1) $a_{2n+1} = 2a_{2n} + (-1)^{2n} = 2[2a_{2n-1} + (-1)^{2n-1}] + 1 = 4a_{2n-1} - 1$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} - \frac{1}{3}}{a_{2n-1} - \frac{1}{3}} = \frac{4a_{2n-1} - \frac{4}{3}}{a_{2n-1} - \frac{1}{3}} = 4,$$

$$\text{又 } b_1 = a_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$, 公比为4的等比数列, 且 $b_n = \frac{2}{3} \times 4^{n-1}$.

(2) 由(1)可知 $a_{2n-1} = b_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times 4^{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2^{2n-1} + 1)$,

$$a_{2n} = 2a_{2n-1} + (-1)^{2n-1} = \frac{2}{3}(2^{2n-1} + 1) - 1 = \frac{1}{3}(2^{2n} - 1).$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1}),$$

$$\text{或 } a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n - 1), & (n = 2k) \\ \frac{1}{3}(2^n + 1), & (n = 2k - 1) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】放缩法证明数列不等式