

# 数列通项求法

## 一、构造等差数列

### 🔗 题型总结

此类问题一般的考察形式是，题干给出数列的递推关系，题目一般会让我们证明相关数列为等差数列，我们需要首先完成证明，然后在证明出来的等差数列的基础上求解出通项公式。

### 1. 典型例题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 6, a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$ 。

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 3}\right\}$ 为等差数列。

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

设 $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ ，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式。

3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$ 。

证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列。

### 2. 巩固练习

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{3}{4}, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 1}\right\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

## 二、构造等比数列

### 🔗 模型一

$a_{n+1} = pa_n + q (p, q \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pq(p-1) \neq 0)$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1} = pa_n + q$ ，利用待定系数法，将递推公式变形为 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ ，设 $b_n = a_n + \lambda$ ，则递推公式等价于 $b_{n+1} = pb_n$ ，因此数列 $\{b_n\}$ 是公比为 $p$ 的等比数列，可根据等比数列的通项公式求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，进而 $\{a_n\}$ 的通项公式可求。

## 模型二

$$a_{n+1} = pa_n + qn + c (pq(p-1) \neq 0)$$

则可以构造  $a_{n+1} + x(n+1) + y = p(a_n + xn + y)$  的形式, 对比  $a_{n+1} = pa_n + qn + c$  可得

$$\begin{cases} px - x = q \\ py - y - x = c \end{cases}$$
, 根据这个方程可解出  $x, y$ , 这样数列  $\{a_n + xn + y\}$  是以  $p$  为公比的等比数列, 这样可以先求出数列  $\{a_n + xn + y\}$  的通项公式, 然后求出数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

## 模型三

$$a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n \quad (p, q, r \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pqr(p-1) \neq 0)$$

当  $p \neq q$  时, 则可以构造  $a_{n+1} + x \cdot q^{n+1} = p(a_n + x \cdot q^n)$  的形式, 对比  $a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n$

可得  $px - qx = r$ , 根据这个方程可解出  $x$ , 这样数列  $\{a_n + x \cdot q^n\}$  是以  $p$  为公比的等比数列, 这样可以先求出数列  $\{a_n + x \cdot q^n\}$  的通项公式, 然后求出数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

当  $p = q$ , 即为  $a_{n+1} = pa_n + r \cdot p^n$ , 两边同除  $p^{n+1}$ , 可得  $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{r}{p}$ , 则数列  $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$  为等差数列。

## 模型四

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \quad (p, q \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pq \neq 0)$$

若数列  $\{a_n\}$  满足递推公式  $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ , 可变形为  $a_{n+2} - xa_{n+1} = y(a_{n+1} - xa_n)$ , 与原递推公式比较可得方程组 
$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = -q \end{cases}$$
,

1. 若方程组有实数解, 则  $\{a_{n+1} - xa_n\}$  是公比为  $y$  的等比数列, 通项公式可求, 进而转化为模型三。
2. 若方程组无实数解, 则  $\{a_n\}$  为周期数列, 利用题目给出条件  $a_1, a_2$  循环以此求出后续项可发现  $\{a_n\}$  陷入循环。

## 模型五

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r} \quad (p, q, r \in \mathbf{R} \text{ 且满足 } pqr \neq 0)$$

若数列  $\{a_n\}$  满足递推公式  $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$ , 两边取倒数得:  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{qa_n + r}{pa_n} = \frac{r}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p}$ , 设

$$b_n = \frac{1}{a_n}, \text{ 则递推公式变为 } b_{n+1} = \frac{r}{p}b_n + \frac{q}{p}:$$

- ① 若  $r = p$ , 则  $\frac{r}{p} = 1$ , 此时  $\{b_n\}$  为等差数列, 通项公式可求, 进而求得  $\{a_n\}$  的通项公式。
- ② 若  $r \neq p$ , 则  $\frac{r}{p} \neq 1$ , 此时  $\{b_n\}$  符合类型一, 以下略。

## 模型六

$$a_{n+1}^p = a_n^q \quad (a_n > 0 \text{ 且 } a_n \neq 1, pq \neq 0)$$

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+1}^p = a_n^q$ , 在 $a_n > 0$ 的前提下, 两边取对数(如取常用对数), 则有 $p \lg a_{n+1} = q \lg a_n$ , 设 $b_n = \lg a_n$ , 则有 $b_{n+1} = \frac{q}{p} b_n$ , 故 $\{b_n\}$ 为等比数列, 以下略.

## 1. 典型例题

### 考察模型一

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 3a_{n-1} + 4$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$ ), 则数列 $\{a_n\}$ 通项公式 $a_n$ 为( ).
- A.  $3^{n-1}$                       B.  $3^{n+1} - 8$                       C.  $3^n - 2$                       D.  $3^n$

### 考察模型二

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 2a_{n-1} + n - 2$  ( $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ).
- 证明: 数列 $\{a_n + n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

### 考察模型三

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 2$ ,  $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n+1}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ).
- 令 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ , 求证 $\{b_n\}$ 是等差数列.
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 5$ 且 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n - 1$  ( $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- 证明: 数列 $\left\{\frac{a_n - 1}{2^n}\right\}$ 为等差数列.

### 考察模型四

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$ ,  $a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n$  ( $n \geq 2$ ).
- (1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

### 考察模型五

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ).
- 求证:  $\left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$ .

### 考察模型六

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- (1) 设 $C_n = \log_5(a_n + 3)$ , 求证 $\{C_n\}$ 是等比数列.
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

## 2. 巩固练习

### 考察模型一

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则数列 $\{a_n\}$ 的前项和 $S_n =$ \_\_\_\_\_.

### 考察模型二

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$ .

证明数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列.

### 考察模型三

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n$ , 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

### 考察模型四

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{3}{2}$ ,  $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 记 $d_n = a_{n+1} - a_n$ , 求证:  $\{d_n\}$ 是等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

### 考察模型五

16. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ . 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

## 三、 根据项与和的关系求通项

已知数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和 $S_n$ , 则 $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$  (注意: 不能忘记讨论 $n = 1$ ).

### 1. 典型例题

#### 考察已知和求通项公式

17. 设 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,  $S_n = 2n^2 + 5n$ .

证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 并求 $a_n$ .

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1} = n(n+2)$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和

$T_n =$ \_\_\_\_\_.

#### 考察已知和与项的关系求通项公式

## 🔗 解题思路

对于已知项与和的关系求解通项公式的问题，我们有两种思路，第一种思路是直接利用项与和的关系式

$$a_n = \begin{cases} S_1; n = 1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases} \text{消掉 } S_n, \text{ 留下数列 } \{a_n\} \text{ 的递推关系式, 然后利用递推关系式求出数列通项}$$

公式；第二种思路是在利用项与和的关系式  $a_n = \begin{cases} S_1; n = 1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases}$  消掉  $S_n$  不好实现的情况下，我们可以先消掉  $a_n$ ，留下关于  $S_n$  的递推关系式，利用递推关系求解出  $S_n$ ，再用

$$a_n = \begin{cases} S_1; n = 1 \\ S_n - S_{n-1}; n \geq 2 \end{cases} \text{ 求出 } a_n.$$

## 🔗 考察思路一

19. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足  $S_n - 2a_n - n = 0 (n \in \mathbf{N}^+)$ ，则数列  $\{a_n - 1\}$  的通项公式为 \_\_\_\_\_。

20. 已知数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ， $na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则数列  $\{a_n\}$  的通项公式为 ( )。

A.  $a_n = n$

B.  $a_n = 2n - 1$

C.  $a_n = \frac{n+1}{2}$

D.  $a_n = \begin{cases} 1, (n=1) \\ n+1, (n \geq 2) \end{cases}$

21. 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且对任意的正整数  $n$  满足  $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ 。求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

22. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$  ( $n$  为正整数)。

令  $b_n = 2^n a_n$ ，求证：数列  $\{b_n\}$  是等差数列，并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

## 🔗 考察思路二

23. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和是  $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $a_1 = 1$  且  $S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0$ 。求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

## 2. 巩固练习

### 🔗 考察已知和求通项公式

24. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n = \frac{n^2 + n}{2} (n \in \mathbf{N})$ 。求数列  $\{a_n\}$  的通项公式。

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \cdots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}$ ,  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 考察已知项与和的关系求通项公式

26. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = S_n + 1$ , 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

27. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 12$ ,  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n^2a_n$ , 则 $a_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

28. 设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 $S_n$ ,  $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.

证明 $\left\{\frac{a_n}{2^n} + 1\right\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项.

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数, 其前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $S_n = \left(\frac{a_n + 1}{2}\right)^2$ .

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

30. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 当 $n \geq 2$ 时, 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$ , 且

$$a_1 = 1.$$

求证: 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列.

## 四、分奇偶求通项

### 题型总结

情形一: 当题目给的关系式中出现

$(-1)^n$  或者  $(-1)^{n-1}$  或者  $(-1)^{n+1}$  或者  $\sin n\pi$  或者  $\cos n\pi$  或者  $\sin \frac{n\pi}{2}$  之类的式子时, 我们需要

讨论 $n$ 的奇偶;

情形二:  $a_n a_{n+1} = f(n)$  或者  $a_n + a_{n+1} = f(n)$  型, 我们可以得到

$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)}$  或者  $a_{n+2} - a_n = f(n+1) - f(n)$  这样的形式, 此时就需要讨论奇偶;

### 1. 典型例题

#### 基础型

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 且 $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ .

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

#### 情形一

32. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ , 且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

求 $a_3, a_4, a_5, a_6$ 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

## 情形二

33. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$  , 当 $n \geq 2$ 时 ,  $a_{n-1} + a_n = 4n$  .  
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

## 2. 巩固练习

34. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$  ,  $a_2 = 3$  , 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$  ,  $n \in \mathbf{N}^*$  .  
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .