

数列求和练习题

1. 已知 $p(x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$, 则

(1) $p(0) + p(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $p\left(\frac{1}{2014}\right) + p\left(\frac{2}{2014}\right) + \cdots + p\left(\frac{2012}{2014}\right) + p\left(\frac{2013}{2014}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) 1

(2) $\frac{2013}{2}$

【标注】【知识点】倒序相加法求和

【知识点】实数指数幂运算

【方法】倒序相加法

【素养】数学运算

2. 知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

(1) 求证：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = n \cdot (a_n + 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) 证明见解析，

通项公式为： $a_n = 3^n - 1$.

(2) $T_n = \frac{3}{4} + \left(\frac{-1+2n}{4}\right) \cdot 3^{n+1}$.

【解析】(1) $\because a_{n+1} = 3a_n + 2$,

$$\therefore a_{n+1} = 3(a_n + 1),$$

$$\therefore \frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 3,$$

$\therefore \{a_n + 1\}$ 是以首项 $a_1 + 1 = 3$, 公比为 3 的等比数列,

$$\therefore a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n,$$

$$\therefore a_n = 3^n - 1.$$

(2) $b_n = n(a_n + 1) = n \cdot 3^n$,

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^n \text{ ①},$$

$$\frac{1}{3}T_n = 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3^3 + \cdots + (n-1)3^{n-2} \text{ ②},$$

①-②得：

$$\frac{2}{3}T_n = -1 - 3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^{n-1} + n \cdot 3^n,$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}T_n &= \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} + n \cdot 3^n = \frac{1}{2} - 3^n \left(\frac{1}{2} - n \right), \\ \therefore T_n &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} - 3^n \left(\frac{1}{2} - n \right) \right], \\ &= \frac{3}{4} - 3^{n+1} \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} + 3^{n+1} \left(\frac{-1 + 2n}{4} \right).\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等比数列的判定与证明；错位相减法求和

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = \frac{3n^2 - n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$ ， $b_5 = a_6$ 。
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【答案】(1) $a_n = 3n - 2$ ， $b_n = 2^{n-1}$ 。

(2) $T_n = 5 + (3n - 5) \cdot 2^n$ 。

【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n^2 - n}{2} - \frac{3(n-1)^2 - (n-1)}{2} = 3n - 2,$$

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 1$ 也适合上式，

$$\therefore a_n = 3n - 2,$$

$$\therefore b_1 = 1, b_5 = 16,$$

设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，则 $q^4 = 16$ ，

$$\therefore q > 0,$$

$$\therefore q = 2,$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由(1)可知， $C_n = (3n - 2) \cdot 2^{n-1}$ ，

$$\therefore T_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

$$= 1 + 4 \times 2 + 7 \times 2^2 + \cdots + (3n - 5) \cdot 2^{n-2} + (3n - 2) \cdot 2^{n-1} \text{①},$$

$$2T_n = 1 \times 2 + 4 \times 2^2 + \cdots + (3n - 5) \cdot 2^{n-1} + (3n - 2) \cdot 2^n \text{②},$$

$$\text{由①-②得：} -T_n = 1 + 3 \times (2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (3n - 2) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 3 \times \frac{2 - 2^{n-1} \times 2}{1 - 2} - (3n - 2) \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = 5 + (3n - 5) \cdot 2^n.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_4 + b_4 = 23$, $S_4 = b_4$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 若 $c_n = a_n b_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$.

(2) $T_n = 6 + 2^{n+1}(2n - 3)$.

【解析】 (1) $\because a_4 + S_4 = 23$,

$$\therefore 5a_1 + 9d = 23,$$

$$\therefore d = 2,$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1,$$

$$\therefore b_4 = S_4 = 4 \times 1 + \frac{4 \times 3}{2} \times 2 = 16,$$

$$\therefore q^3 = \frac{b_4}{b_1} = 8,$$

$$\therefore q = 2,$$

$$\therefore b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

(2) 利用错位相减法, 计算, 求和, 即可.

$$\because c_n = (2n - 1) \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = 1 \times 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^n \text{①},$$

$$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^{n+1} \text{②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{得: } -T_n = 2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - (2n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2 + \frac{8(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1}(3 - 2n) - 6.$$

$$\therefore T_n = 6 + 2^{n+1}(2n - 3).$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题; 错位相减法求和; 等比数列求通项问题

5. 求数列 $1, 3a, 5a^2, 7a^3, \dots, (2n - 1)a^{n-1}$ 的前 n 项和.

【答案】 当 $a = 1$ 时, $S_n = n^2$; 当 $a \neq 1$ 时, $S_n = \frac{1 - (2n - 1)a^n}{1 - a} + \frac{2(a - a^n)}{(1 - a)^2}$

【解析】 本题的求解首先应对 a 进行讨论, 分为 $a = 1$ 和 $a \neq 1$ 两种情况分别求和. 当 $a = 1$ 时, 是一个等差数列的求和问题; 当 $a \neq 1$ 时, 可利用错位相减法求和.

当 $a = 1$ 时, 数列变为 $1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$, 则 $S_n = \frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} = n^2$.

当 $a \neq 1$ 时, 有 $S_n = 1 + 3a + 5a^2 + 7a^3 + \dots + (2n-1)a^{n-1}$, ①

$aS_n = a + 3a^2 + 5a^3 + 7a^4 + \dots + (2n-3)a^{n-1} + (2n-1)a^n$, ②

①-②, 得 $S_n - aS_n = 1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + \dots + 2a^{n-1} - (2n-1)a^n$,

即 $1 - (2n-1)a^n + \frac{2(a-a^n)}{1-a}$.

又 $1-a \neq 0$, $\therefore S_n = \frac{1-a}{1-a} + \frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

综上所述, 当 $a = 1$ 时, $S_n = n^2$; 当 $a \neq 1$ 时, $S_n = \frac{1-(2n-1)a^n}{1-a} + \frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2n^2$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = b_1$, $b_2(a_2 - a_1) = b_1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 4n - 2$, $b_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(2) $T_n = \frac{5}{9} + \frac{6n-5}{9}4^n$.

【解析】 (1) $\because S_n = 2n^2$,

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 2,$$

$$\because a_1 = b_1, b_2(a_2 - a_1) = b_1,$$

$$\therefore b_1 = 2, q = \frac{1}{4},$$

$$\therefore b_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$(2) \because c_n = \frac{a_n}{b_n} = (2n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

$$\therefore T_n = 1 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + 5 \times 4^2 + \dots + (2n-3) \times 4^{n-2} + (2n-1) \times 4^{n-1},$$

$$4T_n = 1 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \dots + (2n-3) \times 4^{n-1} + (2n-1) \times 4^n,$$

$$\therefore \text{相减化简可得 } T_n = \frac{5}{9} + \frac{6n-5}{9}4^n.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 错位相减法求和

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 3$, 公比 $q \neq 1$, 等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1$, $b_4 = a_2$, $b_{13} = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = (-1)^n b_n + a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = 3^n$, $b_n = 2n + 1$.

$$(2) \quad S_n = \begin{cases} \frac{3^{n+1}-3}{2} + n, n \text{ 为偶数} \\ \frac{3^{n+1}-7}{2} - n, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【解析】(1) 设等差数列 $\{b_n\}$ 公差为 d ，等比数列 $\{a_n\}$ 等比为 q ，

$$b_1 = a_1 = 3, b_4 = a_2, b_{13} = a_3,$$

$$\therefore b_1 + 3d = a_1q, b_1 + 12d = a_1q^2,$$

$$\text{联立解得: } q = 3, d = 2,$$

$$\therefore a_n = 3^n, b_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1.$$

$$(2) \quad \because c_n = (-1)^n b_n + a_n,$$

$$\text{① } n = 2k \text{ 时; } -b_{2k-1} + b_{2k} = 2 \times 2k + 1 - [2(2k-1) + 1] = 2,$$

$$\therefore S_n = (-b_1 + b_2) + \cdots + (-b_{2k-1} + b_{2k}) = 2k + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= n + \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^{n+1}-3}{2} + n.$$

$$\text{② } n = 2k-1 \text{ 时,}$$

$$S_n = S_{n+1} - c_{n+1} = \frac{3^{n+2}-3}{2} + n+1 - (b_{n+1} + a_{n+1})$$

$$= \frac{3^{n+2}-3}{2} + n+1 - (2n+3 + 3^{n+1})$$

$$= \frac{3^{n+1}-7}{2} - n.$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} \frac{3^{n+1}-3}{2} + n, n \text{ 为偶数} \\ \frac{3^{n+1}-7}{2} - n, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；分组法求和

8. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ， $b_4 - b_2 = 12$ ， $S_4 + 2S_2 = 3S_3$ 。已知 $a_1 = 3$ ， $a_3 = b_3 + 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \cdots + a_{2n}c_{2n} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【答案】(1) $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$ ，

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$ 。

(2) $3n^2 + (6n-6) \cdot 2^{n+1} + 12 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】(1) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = b_1q^{n-1}$ ，

$$\therefore S_4 + 2S_2 = 3S_3,$$

$$\therefore b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + 2b_1 + 2b_2 = 3b_1 + 3b_2 + 3b_3,$$

$$\therefore -2b_3 + b_4 = 0, \text{ 又 } b_4 - b_2 = 12,$$

$$\therefore \begin{cases} -2b_1q^2 + b_1q^3 = 0 \\ b_1q^3 - b_1q = 12 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}.$$

$$\text{故 } b_n = b_1q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\therefore b_3 = 2^3 = 8,$$

$$\text{设等差数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$\therefore a_1 = 3, a_3 = b_3 + 1,$$

$$\therefore 3 + 2d = 8 + 1, \text{ 解得 } d = 3.$$

$$\text{故 } a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n.$$

$$\text{综上: } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 3n,$$

$$\{b_n\} \text{ 的通项公式为 } b_n = 2^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得: } c_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\therefore a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2b_1 + a_4b_2 + \cdots + a_{2n}b_n)$$

$$= 3(1 + 3 + 5 + \cdots + 2n-1) + (6 \times 2 + 12 \times 2^2 + \cdots + 6n \cdot 2^n)$$

$$= 3 \times \frac{n(1+2n-1)}{2} + 6(2 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n)$$

$$= 3n^2 + 6(2 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n).$$

$$\text{令 } T_n = 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n, \text{ ①}$$

$$\text{则 } 2T_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②}, \text{ 得 } -T_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore -T_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \times 2 - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

$$\therefore a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n} = 3n^2 + 6T_n$$

$$= 3n^2 + (6n-6) \cdot 2^{n+1} + 12 (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；分组法求和

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}, n \in \mathbf{N}^*.$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = a_n \cdot 2^{a_n} + (-1)^n a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$

(2) $T_{2n} = (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + 2 + n, (n \in \mathbf{N}^*).$

【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = \frac{1+1}{2} = 1,$$

当 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} - \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [n^2 + n - (n^2 + 1 - 2n + n - 1)] \\ &= \frac{1}{2} [n^2 + n - n^2 + n] \\ &= n, \end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 1$, 公差 $d = 1$ 的等差数列,

通项公式 $a_n = n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) $\because b_n = a_n \cdot 2^{a_n} + (-1)a_n = n \cdot 2^n + (-1)^n \cdot n, n \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和,

$$\begin{aligned} T_{2n} &= 2 - 1 + 2^3 + 2 + 3 \cdot 2^3 - 3 + 4 \cdot 2^4 + 4 + \cdots + n \cdot 2^n + (-1)^n \cdot n + \cdots + 2n \cdot 2^n + (-1)^{2n} \cdot 2n \\ &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2n \cdot 2^{2n}) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2n \cdot 2^{2n}) + n, \end{aligned}$$

$$\text{令 } \textcircled{1} S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2n \cdot 2^{2n},$$

$$\textcircled{2} 2S_n$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{2n} + 2n \cdot 2^{2n+1},$$

$$\text{则 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } -S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2n} - 2n \cdot 2^{2n+1}$$

$$= \frac{2(1-2^{2n})}{1-2} - 2n \cdot 2^{2n+1}$$

$$= 2^{2n+1} - 2 - 2n \cdot 2^{2n+1}$$

$$= 2^{2n+1}(1-2n) - 2$$

$$= (1-2n) \cdot 2^{2n+1} - 2,$$

$$\text{所以 } S_n = (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + 2,$$

$$T_{2n} = (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + 2 + n, (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 错位相减法求和

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列, 且公比大于0,

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $R_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, T_n = a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_nb_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求:

$$R_{2n} + 3T_{2n} + 2^{2n+3}.$$

【答案】(1) $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) $R_{2n} + 3T_{2n} + 2^{2n+3} = 8$.

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由已知 $b_2 + b_3 = 12$ 得 $b_1(q + q^2) = 12$, 而 $b_1 = 2$,

所以 $q^2 + q - 6 = 0$.

又因为 $q > 0$, 解得 $q = 2$,

所以 $b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

由 $b_3 = a_4 - 2a_1$, 可得 $a_1 + 3d - 2a_1 = 3d - a_1 = 8$.

且 $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \times 11 = \frac{2a_6}{2} \times 11 = 11a_6 = 11(a_1 + 5d) = 11b_4 = 11 \times 2^4$,

即 $a_1 + 5d = 16$, 联立方程 $\begin{cases} a_1 + 5d = 16 \\ 3d - a_1 = 8 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$,

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 的通项公式为

$b_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 令数列 $\{c_n\}$ 的通项公式:

$c_n = (a_{2n-1}b_{2n-1} + a_{2n}b_{2n}) + 3(a_{2n-1}b_{2n-1} - a_{2n}b_{2n}) = 4a_{2n-1}b_{2n-1} - 2a_{2n}b_{2n}$

$= 4 \times (6n-5) \times 2^{2n-1} - 2 \times (6n-2) \times 2^{2n} = -3 \times 2^{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$,

则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $K_n = -3 \times \frac{8 \times (1-4^n)}{1-4} = 8 - 8 \times 4^n = 8 - 2^{2n+3}$,

易知 $R_{2n} + 3T_{2n} = K_n = 8 - 2^{2n+3}$,

故 $R_{2n} + 3T_{2n} + 2^{2n+3} = 8 - 2^{2n+3} + 2^{2n+3} = 8 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【标注】【知识点】等比数列求和问题

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 则数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 100 项的和为 ().

A. $\frac{101}{100}$

B. $\frac{200}{101}$

C. $\frac{99}{100}$

D. $\frac{101}{200}$

【答案】B

【解析】 $\because a_{n+1} = a_n + n + 1$,

$\therefore a_{n+1} - a_n = n + 1$, 又 $a_1 = 1$,

$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

∴数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前100项的和为：

$$2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{200}{101}.$$

故选B.

【标注】【素养】数学运算

【方法】裂项相消法；累加法

【知识点】利用累加法求数列通项公式问题；裂项相消法求和

12. 已知数列 $\{a_n\}$ ： $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}, \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}, \cdots, \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \cdots + \frac{9}{10}, \cdots$ ，若 $b_n = \frac{1}{\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{n}}$ ，那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为（ ）.
- A. $\frac{n}{n+1}$ B. $\frac{4n}{n+1}$ C. $\frac{3n}{n+1}$ D. $\frac{5n}{n+1}$

【答案】B

【解析】由题意知，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\frac{n+1}{(1+n)n}} + \frac{2}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2}{n+1} = \frac{n}{2}, \\ a_{n+1} &= \frac{2}{\frac{1}{2}}, \\ b_n &= \frac{1}{\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n+1}} = \frac{4}{n(n+1)} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \\ \text{故 } S_n &= 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4n}{n+1}. \end{aligned}$$

故选B.

【标注】【知识点】裂项相消法求和

13. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) $a_n = \frac{2}{2n-1}$ ；

$$(2) \frac{2n}{2n+1}$$

【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$.

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} = 2(n-1).$$

$$\therefore (2n-1)a_n = 2,$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1}.$$

当 $n=1$ 时, $a_1=2$, 上式也成立,

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1}.$$

$$(2) \frac{a_n}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；裂项相消法求和

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 首项 $a_1 = 1$, 且 $2a_1, a_2 + 1, a_3 + 3$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 P_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$.

$$(2) P_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

【解析】(1) $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$,

首项 $a_1 = 1$, $2a_1, a_2 + 1, a_3 + 3$ 成等比数列,

$$\therefore \text{由已知 } (a_2 + 1)^2 = 2a_1(a_3 + 3),$$

$$\therefore (1 + d + 1)^2 = 2(1 + 2d + 3),$$

$$\text{则 } d^2 = 2d,$$

$$\text{又 } d > 0,$$

$$\therefore d = 2,$$

$$\therefore a_n = 2n - 1.$$

$$(2) \therefore \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和:

$$P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】数列与不等式综合；等差数列求通项问题；裂项相消法求和

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $2a_2 + a_3 + a_5 = 20$ ，且前10项和 $S_{10} = 100$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$ 。

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $= \frac{n}{2n+1}$ 。

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\because 2a_2 + a_3 + a_5 = 20, \text{ 且前10项和 } S_{10} = 100,$$

$$\therefore 4a_1 + 8d = 20, 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 100,$$

$$\text{联立解得 } a_1 = 1, d = 2.$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

$$(2) b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{n}{2n+1}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；等差数列求通项问题

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其中 $a_2 + a_3 = 8$ ， $a_5 = 3a_2$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $b_n = \frac{2}{a_n a_{n+1}}$ ，设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求最小的正整数 n ，使得 $S_n > \frac{2018}{2019}$ 。

【答案】(1) 通项公式为 $a_n = 2n - 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(2) $n = 1010$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\text{依题意有 } \begin{cases} 2a_1 + 3d = 8 \\ a_1 + 4d = 3a_1 + 3d \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 1, d = 2,$$

从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

$$(2) \text{ 因为 } b_n = \frac{2}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{令 } 1 - \frac{1}{2n+1} > \frac{2018}{2019}, \text{ 解得 } n > 1009, \text{ 故取 } n = 1010.$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；数列的函数特性；数列与不等式综合

17. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2 = 3, b_3 = 9, a_1 = b_1, a_{14} = b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = a_n + b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) $a_n = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$.

$$(2) S_n = n^2 + \frac{3^n - 1}{2}, n \in \mathbf{N}^*.$$

【解析】(1) 由题意知数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{9}{3} = 3$ ，则 $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{3}{3} = 1$ ，

故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为： $b_n = b_1 q^{n-1} = 3^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$ ，

$$\text{则 } b_4 = 3^{4-1} = 27,$$

由题意，等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = b_1 = 1, a_{14} = b_4 = 27$ ，

$$\text{所数数列 } \{a_n\} \text{ 的公差 } d = \frac{a_{14} - a_1}{14 - 1} = \frac{27 - 1}{14 - 1} = \frac{36}{13} = 2,$$

则数列 $\{a_n\}$ 通项公式为： $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*$

$$(2) \text{ 数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为： } \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2} = n^2,$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为： } \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = \frac{3^n - 1}{2},$$

$$\text{所以数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为： } S_n = n^2 + \frac{3^n - 1}{2}, n \in \mathbf{N}^*.$$

【标注】【知识点】分组法求和；等比数列的概念与通项公式；等差数列求通项问题

18. 数列 $1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{8}, 4 + \frac{1}{16}, \dots$ 的前 n 项和为().

A. $2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$

B. $2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$

C. $\frac{n}{2}(n+1) + 1 - \frac{1}{2^n}$

D. $\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

【答案】 C

【解析】设该数列通项为 a_n ，前 n 项和为 S_n ，

$$\text{则 } a_n = n + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

由等差等比数列的性质可知：

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} + 3 + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{16} + \cdots + n + \frac{1}{2^n} \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{(1+n)n}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{n}{2}(n+1) + 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】分组法求和

19. 已知数列的通项公式 $a_n = (-1)^{n-1}(4n-3)$ ，则其前 n 项和为 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $S_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ -2n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$

【解析】 n 为偶数时，

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \\ &= (1-5) + (9-13) + \cdots + [4(n-1)-3-(4n-3)] \\ &= -4 \times \frac{n}{2} \\ &= -2n. \end{aligned}$$

n 为奇数时，

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= S_{n-1} + a_n \\ &= -2(n-1) + 4n-3 \\ &= 2n-1. \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} -2n, n \text{ 为偶数} \\ 2n-1, n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

【标注】【素养】逻辑推理

20. 已知函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1, \lambda)$ ，且对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x+1) = f(x) + 2$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \lambda - 2, a_{n+1} = \begin{cases} 2^n, n \text{ 为奇数} \\ f(a_n), n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

(1) 求 $f(n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$)的表达式.

(2) 设 $\lambda = 3$, 求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n}$.

(3) 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $a_n a_{n+1} < a_{n+1} a_{n+2}$, 求实数 λ 的取值范围.

【答案】 (1) $f(n) = 2n + \lambda - 2$.

(2) $2^{2n} + n - 2$.

(3) $(-2, +\infty)$.

【解析】 (1) 记 $b_n = f(n)$, 由 $f(x+1) = f(x) + 2$ 有 $b_{n+1} - b_n = 2$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,

又 $b_1 = f(1) = \lambda$,

所以数列 $\{b_n\}$ 为首项为 λ , 公差为 2 的等差数列,

故 $b_n = 2n + \lambda - 2$, 即 $f(n) = 2n + \lambda - 2$.

(2) 由题设 $\lambda = 3$,

若 n 为偶数, 则 $a_n = 2^{n-1}$;

若 n 为奇数且 $n \geq 3$, 则

$$a_n = f(a_{n-1}) = 2a_{n-1} + \lambda - 2 = 2 \cdot 2^{n-2} + \lambda - 2 = 2^{n-1} + \lambda - 2 = 2^{n-1} + 1,$$

又 $a_1 = \lambda - 2 = 1$,

$$\text{即 } a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2^{n-1} + 1, & n \text{ 为奇数且 } n \geq 3 \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n}$$

$$= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})$$

$$= (2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{2n-2} + n - 1) + (2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1})$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2n-1}) + n - 1$$

$$= 2^{2n} + n - 2.$$

(3) 当 n 为奇数且 $n \geq 3$ 时,

$$a_{n+1}a_{n+2} - a_na_{n+1}$$

$$= a_{n+1}(a_{n+2} - a_n)$$

$$= 2^n[2^{n+1} + \lambda - 2 - (2^{n-1} + \lambda - 2)]$$

$$= 3 \cdot 2^{2n-1} > 0;$$

当 n 为偶数时,

$$a_{n+1}a_{n+2} - a_na_{n+1}$$

$$= a_{n+1}(a_{n+2} - a_n)$$

$$= (2^n + \lambda - 2)(2^{n+1} - 2^{n-1})$$

$$= 3 \cdot 2^{n-1}(2^n + \lambda - 2),$$

因为 $a_na_{n+1} < a_{n+1}a_{n+2}$,

所以 $2^n + \lambda - 2 > 0$,

$\therefore n$ 为偶数,

$\therefore n \geq 2$,

$\therefore 2^n + \lambda - 2$ 单增,

$\therefore 4 + \lambda - 2 > 0$,

即 $\lambda > -2$,

故 λ 得取值范围为 $(-2, +\infty)$.

【标注】【知识点】等差数列的判定与证明问题；分组法求和；数列单调性问题；数列与不等式综合