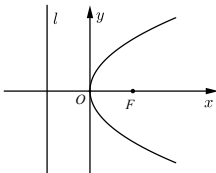
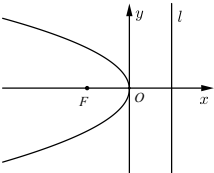
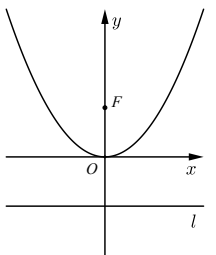
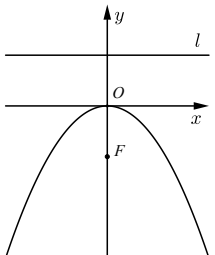


03抛物线性质综合应用

1. 抛物线的概念及性质

1. 抛物线的基本概念与基础性质

定义				
图像				
标准方程				
x,y的范围				
焦点				
准线方程				
焦半径				
焦点弦				
顶点坐标				
焦准距				
离心率				

【特别说明】

- ①**焦半径**：设 M 是抛物线上一点，焦点为 F ，则线段 MF 叫作抛物线的**焦半径**
- ②**焦点弦**：抛物线过焦点 F 的一条弦，记作**焦点弦**
- ③**焦准距**：抛物线的焦点到它的准线的距离，叫做**焦准距**

【备注】 【金金备注】 对于定义的解释：

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l （ l 不经过点 F ）距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**
 定点 F 叫作抛物线的**焦点**，定直线 l 叫作抛物线的**准线**。

2. 抛物线的通径

(1) 定义：过焦点且与焦点所在的轴垂直的直线与抛物线交于点 M_1 , M_2 ,
线段 M_1M_2 叫作抛物线的**通径** .

(2) 长度：将 $x_0 = \frac{p}{2}$ 代入 $y^2 = 2px$ 得 $y = \pm p$, 故抛物线 $y^2 = 2px$ 的通径长为 $2p$.

(3) 通径是所有焦点弦中**最短**哒！

2. 抛物线的具体题型

抛物线的方程

1. 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程是 $y = 2$, 则 a 的值为 () .

- A. -8 B. 8 C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】 C

【解析】 抛物线标准方程为 $x^2 = \frac{1}{a}y$,
 $-\frac{1}{4a} = 2$ 则 $a = -\frac{1}{8}$.
故选 C .

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

2. 抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点到准线的距离是 () .

- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】 D

【解析】 焦点到准线的距离为 p , 由题中 $y = 4x^2$ 得 $x^2 = \frac{1}{4}y$, $2p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{8}$.
故选 D .

【标注】 【知识点】 抛物线的定义；抛物线的标准方程

3. 若抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的准线经过双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 的一个焦点 , 则 $p =$ _____ .

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\because$ 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,
又 $\because$ 左焦点为 $(-\sqrt{2}, 0)$,
 $\therefore -\sqrt{2} = -\frac{p}{2}$,
 $\therefore p = 2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

4. 以抛物线 $x^2 = 16y$ 的焦点为圆心，且与抛物线的准线相切的圆的方程为_____.

【答案】 $x^2 + (y - 4)^2 = 64$

【解析】 抛物线 $x^2 = 16y$ 的焦点为 $(0, 4)$ ，

焦点到准线的距离为8，

故以抛物线 $x^2 = 16y$ 的焦点为圆心，且与抛物线的准线相切的圆的方程为

$$x^2 + (y - 4)^2 = 64,$$

故答案为： $x^2 + (y - 4)^2 = 64$.

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

5. 已知定点 $A(2, 0)$ ，它与抛物线 $y^2 = x$ 上的动点 P 连线的中点 M 的轨迹方程为() .

A. $y^2 = x - 1$

B. $y^2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

C. $y^2 = 2(x - 1)$

D. $y^2 = 4(x - 1)$

【答案】 B

【解析】 设 $P(x_1, y_1)$ ， $M(x, y)$ ，则 $y_1^2 = x_1$ ①，

又 M 为 AP 中点，

$$\therefore x = \frac{x_1 + 2}{2},$$

$$y = \frac{y_1}{2},$$

$$\therefore x_1 = 2x - 2, y_1 = 2y,$$

代入①得， $(2y)^2 = 2x - 2$ ，即 $y^2 = \frac{1}{2}(x - 1)$.

【标注】 【知识点】 求点的轨迹

6. 已知直线 $(2a + 1)x + (3a - 1)y - 4a + 3 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 恒过定点 p ，则过点 p 抛物线的标准方程是() .

A. $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = 4y$

B. $x^2 = -\frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = 4x$

C. $x^2 = \frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = -4x$

D. $y^2 = \frac{1}{2}x$ 或 $x^2 = -4y$

【答案】 C

【解析】 直线 $(2a + 1)x + (3a - 1)y - 4a + 3 = 0$

$$2ax + x + 3ay - y - 4a + 3 = 0$$

$$a(2x + 3y - 4) + x - y + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

恒过定点 $(-1, 2)$ ，则过点 P 的抛物线的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 或 $y^2 = -4x$.

【标注】【知识点】抛物线的标准方程

7. 顶点在原点，对称轴是 y 轴，且顶点与焦点的距离等于6的抛物线标准方程是 _____ .

【答案】 $x^2 = \pm 24y$

【解析】 顶点在原点，对称轴是 y 轴，且顶点与焦点的距离等于6，可得抛物线方程 $p = 12$ ，

所求抛物线方程为： $x^2 = \pm 24y$.

故答案为： $x^2 = \pm 24y$.

【标注】【知识点】抛物线的定义

8. 已知抛物线的准线是圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + y - 3 = 0$ 的公共弦所在的直线，则抛物线的标准方程为 () .

A. $y^2 = 4x$

B. $y^2 = -4x$

C. $x^2 = 4y$

D. $x^2 = -4y$

【答案】 C

【解析】 $\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 + y - 3 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$,

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 + y - 3) = 0 ,$$

$$-4 - y + 3 = 0 ,$$

$$y = -1 ,$$

$\therefore y = -1$ 为2圆的公共弦，

$$\text{准线} : y = -1 ,$$

$\therefore$ 抛物线为 $x^2 = 4y$.

故选C .

【标注】【知识点】抛物线的标准方程

双曲线与抛物线的综合简单题

9.

双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$ 的离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2 = 4mx$ 的焦点重合, 则 n 的值为 _____ .

【答案】 12

【解析】 抛物线 $y^2 = 4mx$ 的焦点坐标 $(m, 0)$,

因为双曲线的半焦距 $c = m$,

$$\text{离心率 } e = \frac{m}{\sqrt{m}} = 2,$$

解得 $m = 4$,

$$\text{又由 } m + n = m^2,$$

解得 $n = 12$.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线与圆 $(x - 3)^2 + y^2 = 225$ 相切, 双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$, 它的一个焦点是该抛物线的焦点, 则双曲线实轴长 _____ .

【答案】 12

【解析】 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

$\therefore$ 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线与圆 $(x - 3)^2 + y^2 = 225$ 相切,

$$\therefore 3 + \frac{p}{2} = 15,$$

$$\therefore p = 24,$$

$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$, 它的一个焦点是该抛物线的焦点,

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3}, a^2 + b^2 = 144,$$

$$\therefore a = 6, b = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore 2a = 12,$$

$\therefore$ 双曲线实轴长为 12.

故答案为: 12.

【标注】【知识点】抛物线的标准方程

11. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 2. 若抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2, 则抛物线 C_2 的方程为 _____ .

【答案】 $x^2 = 16y$

【解析】 由题意可得双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

化为一般式可得 $bx \pm ay = 0$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2$,

解得 $b = \sqrt{3}a$,

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a$,

又抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$,

故焦点到 $bx \pm ay = 0$ 的距离 $d = \frac{ap}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ap}{2c} = 2$,

$\therefore p = \frac{4c}{a} = \frac{4 \times 2a}{a} = 8$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的方程为: $x^2 = 16y$.

故答案为: $x^2 = 16y$.

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

12. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 恰好是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 且两条曲线的交点连线过 F , 则双曲线的离心率为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{2} + 1$

D. $\sqrt{2} - 1$

【答案】 C

【解析】 因为抛物线的焦点和双曲线的焦点相同, 所以 $p = 2c$.

设 A 是它们的一个公共点, 且 AF 垂直 x 轴,

设 A 点的纵坐标大于 0, 所以 $|AF| = p$, 所以 $A(\frac{p}{2}, p)$.

因为点 A 在双曲线上, 所以 $\frac{p^2}{4a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$,

因为 $p = 2c$, $b^2 = c^2 - a^2$, 所以 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{4c^2}{c^2 - a^2} = 1$,

化简得 $c^4 - 6c^2a^2 + a^4 = 0$, 所以 $e^4 - 6e^2 + 1 = 0$.

因为 $e^2 > 1$, 所以 $e^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, 所以 $e = \sqrt{2} + 1$, 故选 C.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 求双曲线的离心率

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p =$ ().

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

又抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程是 $x = -\frac{p}{2}$,

故 A, B 两点的纵坐标分别是 $y = \pm \frac{pb}{2a}$,

双曲线的离心率为 2, 所以 $\frac{c}{a} = 2$, 则 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

所以 A, B 两点的纵坐标分别是 $y = \pm \frac{\sqrt{3}p}{2}$,

$\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, x 轴是 $\angle AOB$ 的角平分线,

$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{3}p \times \frac{p}{2} = \sqrt{3}$, 得 $p = 2$, 故选 C.

【标注】【知识点】抛物线与双曲线结合

🔗 抛物线的定义及应用

14. 圆心在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 (x < 0)$ 上, 并且与直线 $y = -1$ 及 y 轴都相切的圆的方程是 ().

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

【答案】C

【解析】方法一：曲线方程可化为 $x^2 = 4y$,

即抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $(0, 1)$,

由抛物线的定义可知, 抛物线上的点 $(-2, 1)$ 到 $y = -1$ 及 y 轴的距离相等,

从而圆的圆心为 $(-2, 1)$, 半径为 2,

所以所求圆的方程为 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 故选 C.

方法二：设所求圆的圆心为 (a, b) ,

$$\text{则 } \begin{cases} a < 0 \\ b = \frac{1}{4}a^2 \\ |b+1| = |a| \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases},$$

从而半径为 $|a| = 2$,

所以所求圆的方程为 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 故选 C.

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；抛物线与圆结合

🔗 焦半径、焦点弦

15. 已知 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF| = 4\sqrt{2}$, 则

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = (\quad) .$$

A. 6

B. 12

C. 36

D. 42

【答案】 C

【解析】 抛物线方程为 $y^2 = 4\sqrt{2}x$,

所以焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 准线为 $x = -\sqrt{2}$,

又因为抛物线上的点到焦点的距离等于其到准线的距离,

所以 $|PF| = x_P - (-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$,

所以 $x_P = 3\sqrt{2}$, $y_P = 2\sqrt{6}$, $P(3\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$,

又 $F(\sqrt{2}, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{OP} = (3\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{FP} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = 36$.

故选C.

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

16. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , M , N 是抛物线上两个不同的点. 若 $|MF| + |NF| = 5$, 则线段 MN 的中点到 y 轴的距离为 ().

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. 5

D. $\frac{5}{2}$

【答案】 B

【解析】 已知 M 、 N 为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的不同两点, 且 $|MF| + |NF| = 5$,

故由抛物线的定义可得 $x_M + x_N = 3$,

所以线段 MN 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{3}{2}$.

故选B.

【标注】 【知识点】 抛物线的定义; 中点弦问题; 中点公式

17. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, M 为抛物线 C 上一点, 若 $|MF| = 2p$, $S_{\triangle OFM} = 4\sqrt{3}$, 则 p 的值为 ().

A. 8

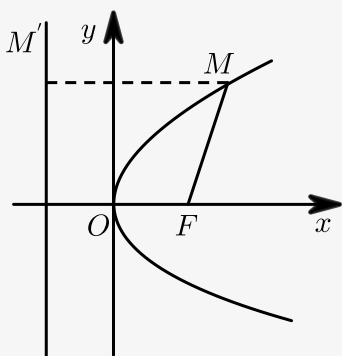
B. 4

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】抛物线草图如下：



不妨设 M 在第一象限，

由 M 作准线的垂线，垂足为 M' 。

因为 $MM' = MF = \frac{p}{2} + x_M = 2p$ ，

所以 $x_M = \frac{3}{2}p$ ，即 $y_M = \sqrt{3}p$ 。

又因为 $S_{\triangle OFM} = \frac{1}{2}|OF| \cdot |y_M| = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} \times \sqrt{3}p = 4\sqrt{3}(p > 0)$ ，

解得 $p = 4$ 。

故选B。

【标注】【知识点】抛物线的标准方程；抛物线的定义

18. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是抛物线上的两个动点，若满足

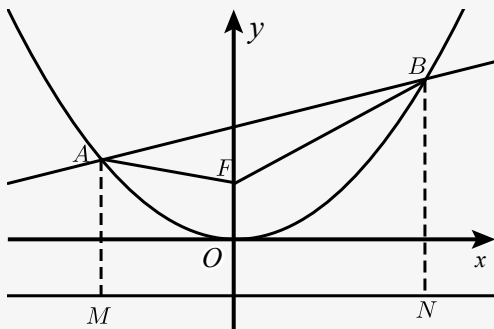
$y_1 + y_2 + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|$ ，则 $\angle AFB$ 的最大值是（ ）。

A. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{3\pi}{4}$

B. $\frac{2\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】



$$\because y_1 + y_2 + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|,$$

$$|AF| + |BF| = y_1 + y_2 + 2,$$

$$\therefore |AF| + |BF| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|,$$

在 $\triangle AFB$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle AFB = \frac{|AF|^2 + |BF|^2 - |AB|^2}{2|AF||BF|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(|AF| + |BF|)^2 - 2|AF||BF| - |AB|^2}{2|AF||BF|} \\
&= \frac{\frac{4}{3}|AB|^2 - |AB|^2}{2|AF||BF|} - 1 \\
&= \frac{\frac{1}{3}|AB|^2}{2|AF||BF|} - 1, \\
&\text{又 } |AF| + |BF| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB| \geq 2\sqrt{|AF| \cdot |BF|}, \\
&\text{当且仅当 } |AF| = |BF| \text{ 时等号成立,} \\
&\therefore |AF| \cdot |BF| \leq \frac{1}{3}|AB|^2, \\
&\therefore \cos \angle AFB \geq \frac{\frac{1}{3}|AB|^2}{2 \times \frac{1}{3}|AB|^2} - 1 = -\frac{1}{2}, \\
&\therefore \angle AFB \text{ 的最大值为 } \frac{2\pi}{3}. \\
&\text{故选 B.}
\end{aligned}$$

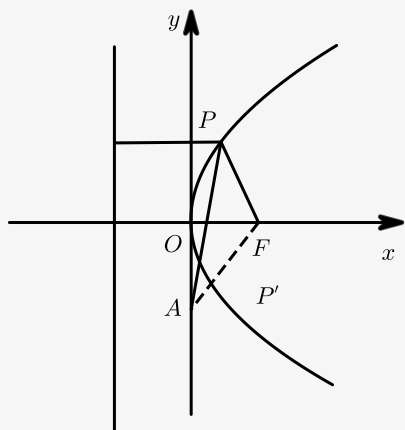
【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和抛物线的位置关系

最短距离问题

19. 点 P 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点，则点 P 到点 $A(0, -1)$ 的距离与到直线 $x = -1$ 的距离之和的最小值是 _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 如图所示，



由抛物线的性质知，点 P 到点 $A(0, -1)$ 的距离与到直线 $x = -1$ 的距离和等于点 P 到点 $A(0, -1)$ 的距离与到焦点 $F(1, 0)$ 的距离和。因此当 P 点运动到直线 AF 上时，有最短距离，因此最短距离为 $d = |AF| = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$.

【标注】【知识点】利用抛物线定义求线段最值

20.

已知 P 为抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的动点，点 P 在 x 轴上的射影为 M ，点 A 的坐标是 $(6, \frac{17}{2})$ ，则

$|PA| + |PM|$ 的最小值是()

A. 8

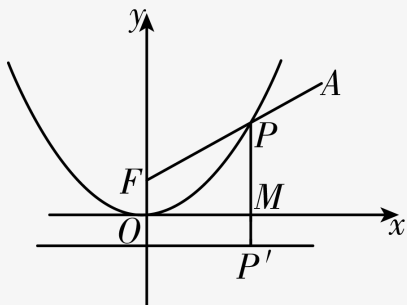
B. $\frac{19}{2}$

C. 10

D. $\frac{21}{2}$

【答案】 B

【解析】 如图，



由抛物线的定义知， $|PF| = |PP'| = |PM| + \frac{1}{2}$ ，

故 $|PM| = |PF| - \frac{1}{2}$ 。所以 $|PA| + |PM| = |PA| + |PF| - \frac{1}{2}$ 的最小值，当 P 、 A 、 F 三点共线时取到， $|AF| = 10$ ，故 $|PA| + |PM|$ 的最小值为 $10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 抛物线的定义；抛物线的几何性质

21. 已知抛物线 $C: x^2 = 8y$ 的焦点为 F ， O 为原点，点 P 是抛物线 C 的准线上的一动点，点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF| = 4$ ，则 $|PA| + |PO|$ 的最小值为()。

A. $4\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{13}$

C. $3\sqrt{13}$

D. $4\sqrt{6}$

【答案】 B

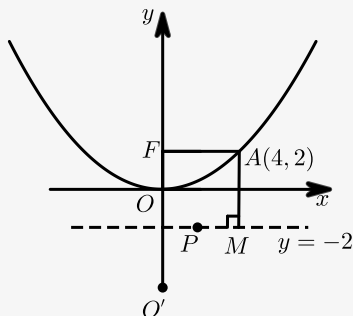
【解析】 $\because x^2 = 8y$ ，

$\therefore F(0, 2)$ ，

设准线为 l ，

$l: y = -2$ ，

过 A 作 $AM \perp l$ 交 l 于 M （不妨设 A 在 y 轴右侧），



$|AM| = |AF| = 4$ ，

$$\therefore y_M = -2,$$

$$\therefore y_A = 2,$$

$$\therefore A(4, 2),$$

作 O' 与 O 关于 $l: y = -2$ 对称,

$$\therefore O'(0, -4),$$

$$|AP| + |OP| = |AP| + |PO'| \geq |AO'| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13},$$

当且仅当 P 在 AO' 与 $y = -2$ 的交点处时取得最小值.

故选B.

【标注】【知识点】最值问题

22. 已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 则点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与到点 P 到抛物线的焦点 F 的距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为 ().

A. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

B. $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$

C. $(1, 2)$

D. $(1, -2)$

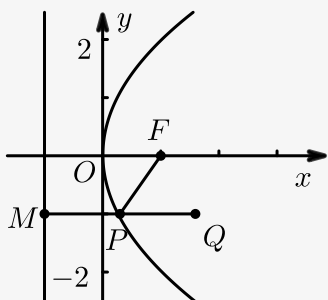
【答案】 B

【解析】 $\because y^2 = 4x,$

$\therefore p = 2$, 焦点坐标为 $(1, 0)$,

过 P 作准线的垂线于 M , 由 $PF = PM$, 依题意可知当 P, Q 和 M 三点共线且点 P 在中间的时候,

距离之和最小如图,



故 P 的纵坐标为 -1 , 然后代入抛物线方程求得 $x = \frac{1}{4}$,

故答案为 $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$,

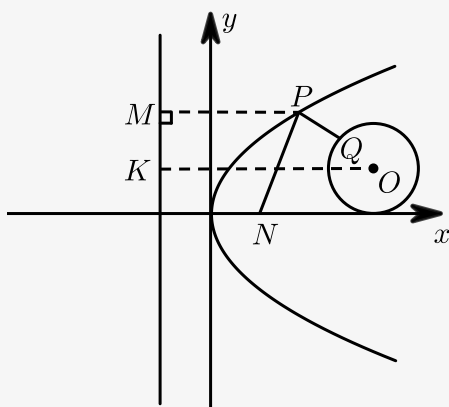
故选B.

【标注】【知识点】抛物线的定义

23. 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点, 点 Q 是圆 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上的一个动点, 点 $N(1, 0)$ 是一个定点, 则 $|PQ| + |PN|$ 的最小值为 _____ (用数字填写).

【答案】 3

【解析】 结合题意，绘制图像，



过点 P 作准线的垂线，垂足为 M ，

由抛物线定义可知， $PN = PM$ ，

当 P, Q 所在直线在过圆心且垂直于抛物线的准线的直线上，

此时取得最小值， O 点坐标为 $(3, 1)$ ，

故最小值为 $4 - 1 = 3$ 。

【标注】 【知识点】 圆的标准方程问题；抛物线的定义

24. 点 $A(3, 2)$ ， F 为抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点，点 P 是抛物线上一动点，则 $PA + PF$ 取得最小值时 P 的坐标是（ ）。

A. $(0, 0)$

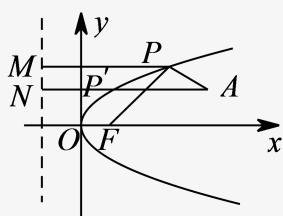
B. $(1, 1)$

C. $(2, 2)$

D. $(2, 1)$

【答案】 C

【解析】 如图所示，作 $PM \perp$ 准线于 M ，



则有 $PF = PM$ ，则 $PA + PF = PA + PM$ ，

作 $AN \perp$ 准线于 N ，交抛物线于 P' ，

则 $PA + PM \geq AN = P'A + P'F$ ，此时 $P'(2, 2)$ ，

故选C。

【标注】 【知识点】 抛物线的定义；最值问题

【答案】 B

【解析】 边读题边画图. $y^2 = 8x$ 的焦点 $F(2, 0)$,

准线 $x = -2$, $K(-2, 0)$. 设 $A(x, y)$, 由 $|AK| = \sqrt{2}|AF|$,

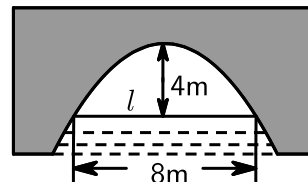
得 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$,

即 $(x+2)^2 + y^2 = 2[(x-2)^2 + y^2]$. 化简得: $y^2 = -x^2 + 12x - 4$,

与 $y^2 = 8x$ 联立, 解得: $x = 2$, $y = \pm 4$. 因此 $S_{\triangle AFK} = \frac{1}{2} \cdot |FK| \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

28. 如图所示是抛物线形拱桥, 当水面在 l 位置时, 拱顶离水面 4m , 水面宽 8m , 则水位下降 1m 后 (水足够深), 水面的宽度为 ().



A. $4\sqrt{5}\text{m}$

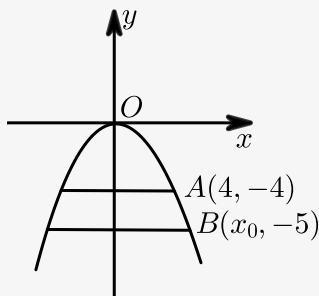
B. $4\sqrt{6}\text{m}$

C. $6\sqrt{5}\text{m}$

D. $6\sqrt{6}\text{m}$

【答案】 A

【解析】 如图建立直角坐标系,



由题意得, 设抛物线方程为 $x^2 = my$,

将 $A(4, -4)$ 代入得 $m = -4$,

$\therefore x^2 = -4y$,

$\therefore$ 代入 $B(x_0, -5)$ 得 $x_0 = 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 水面宽为 $4\sqrt{5}\text{m}$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

