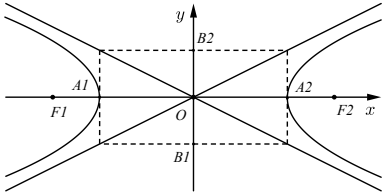
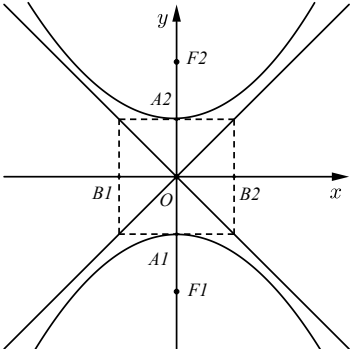


02双曲线性质综合应用

1. 双曲线的基础知识

【备注】 【金金备注】 暑期没有学习双曲线模块或者掌握得不太好的同学，练习册上有【超简单的基本量计算】，最初学习时可以使用上面的习题！

双曲线的基本概念与基础性质

定义		
图形		
标准方程		
焦点		
顶点		
x、y的范围		
渐近线		
实轴、虚轴、焦距		
a, b, c 的关系		
离心率		

【备注】 【金金备注】 对于定义的解释：

平面内与两个定点 F_1 ， F_2 的距离的差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 且不等于零）的点的轨迹叫作**双曲线**。

这两个定点叫作双曲线的**焦点**，两焦点的距离叫作双曲线的**焦距**。

定义

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a (2c > 2a > 0)$$

- A. $m > -1$

B. $m < -2$

C. $-2 < m < -1$

D. $m > -1$ 或 $m < -2$

【答案】 D

【解析】 $(2+m)(1+m) > 0$,

解得 $m < -2$ 或 $m > -1$.

故选D.

【标注】 **【知识点】** 由曲线的方程研究曲线的性质

- () .

A. $(-1, 3)$

B. $(-1, \sqrt{3})$

C. $(0, 3)$

D. $(0, \sqrt{3})$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 双曲线两焦点间的距离为4,

$$\therefore c = 2 .$$

当焦点在 x 轴上时,

可得： $4 = (m^2 + n) + (3m^2 - n)$ ，解得： $m^2 = 1$ ，

$\therefore$ 方程 $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$ 表示双曲线,

$$\therefore (m^2 + n)(3m^2 - n) > 0, \text{ 可得: } (n + 1)(3 - n) > 0,$$
解得： $-1 < n < 3$.

即 n 的取值范围是： $(-1, 3)$.

当焦点在 y 轴上时，

可得： $-4 = (m^2 + n) + (3m^2 - n)$ ，解得： $m^2 = -1$ ，

无解.

故选：A .

【标注】 【知识点】 双曲线的基本量求解

3. $k > 9$ 是方程 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 表示双曲线的 ().

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分又不必要条件

【答案】 B

【解析】 $\because k < 9, \therefore 9 - k < 0, k - 4 > 0,$

$\therefore$ 方程 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 表示双曲线,

$\therefore$ 方程 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 表示双曲线,

$\therefore (9-k)(k-4) < 0$, 解得 $k > 9$ 或 $k < 4$,

$\therefore k > 9$ 是方程 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{k-4} = 1$ 表示双曲线的充分不必要条件.

故选: B.

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 双曲线的标准方程

【知识点】 充要条件与解析几何结合

4. 若实数 k 满足 $0 < k < 5$, 则曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5-k} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的 ().

A. 实半轴长相等

B. 虚半轴长相等

C. 离心率相等

D. 焦距相等

【答案】 D

【解析】 由已知得两曲线都是焦点在 x 轴上的双曲线,

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 = 16 + 5 - k = 21 - k, \text{ 同理 } c_2^2 = 21 - k,$$

$$c_1^2 = c_2^2 \Rightarrow 2c_1 = 2c_2, \text{ 故两双曲线焦距相等.}$$

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程

双曲线方程及基本量简单求解

5. 双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 的渐近线方程为 ____.

【答案】 $y = \pm \frac{4}{3}x$

【解析】 把双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 化成标准方程为 $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$,

$$\therefore a = 4 \text{ 且 } b = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线的渐近方程为 } y = \pm \frac{a}{b}x,$$

$$\text{即 } y = \pm \frac{4}{3}x.$$

$$\text{故答案为: } y = \pm \frac{4}{3}x.$$

故答案为： $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

【知识点】双曲线的标准方程

【素养】数学运算

12. 设双曲线 C 经过点 $(2, 2)$ ，且与 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 具有相同渐近线，则 C 的方程为 _____ .

【答案】 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$

【解析】 $\because$ 双曲线 C 与 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 有相同渐近线，
 $\therefore$ 设 C 的方程为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = k$ ，
代入点 $(2, 2)$ ，得 $k = -3$ ，
 $\therefore C$ 的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，离心率为 $\sqrt{2}$ ，若经过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为 _____ .

【答案】 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

【解析】设点 $F(-c, 0) (c > 0)$ ，

因为该双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$ ，所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$ ，①

又经过 F 和 $P(0, 4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，

所以 $k_{FP} = \frac{4-0}{0-(-c)} = \frac{b}{a}$ ，②

联立①②，解得 $b = 2\sqrt{2}$.

又 $a^2 + b^2 = c^2$ ，即 $a^2 + 8 = c^2$ ③，联立①③，解得 $a^2 = 8$ ， $c^2 = 16$ ，

故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

🔗 双曲线定义的简单应用

14. 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线上，且 $PF_1 = 12$ ， $PF_2 = ()$.

A. 17

B. 7

C. 7或17

D. 2或22

【答案】D

【解析】由方程可得 $a=5, b=3, c=\sqrt{34}$,

由定义知 $|PF_1 - PF_2| = 2a = 10$, 而 $PF_1 = 12$,

则 $PF_2 = 2$ 或 22 , $PF_2 > |a - c| = \sqrt{34} - 5$, 两个结果皆满足条件,

故选D.

【标注】【知识点】双曲线的定义

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点, M 到 $A(5, 0)$ 的距离为3, 则 M 到其左焦点的距离等于().

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

【答案】D

【解析】 $\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点为 $A(5, 0), F(-5, 0)$,

$\therefore |MA| = 3$,

$\therefore$ 点 M 在双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 右支,

$\therefore |MF| - |MA| = 6$,

$\therefore |MF| = 9$.

故选D.

【标注】【知识点】双曲线的定义



双曲线定义的复杂应用

16. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得

$|PF_1| + |PF_2| = 3b, |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$, 则该双曲线的离心率为().

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{9}{4}$

D. 3

【答案】B

【解析】由已知得 $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, 又 $(|PF_1| + |PF_2|)^2 - (|PF_1| - |PF_2|)^2 = 9b^2 - 4a^2$,

即 $4|PF_1| \cdot |PF_2| = 9b^2 - 4a^2$, 又因为 $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$, 所以 $9b^2 - 4a^2 = 9ab$, 即

$9(\frac{b}{a})^2 - 9(\frac{b}{a}) - 4 = 0$, 解得 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 于是 $e = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \frac{5}{3}$, 故答案为B.

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

【素养】数学运算

17. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| =$ _____ .

【答案】 4

【解析】 $\because$ 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$,

$$\therefore a^2 = b^2 = 1,$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0), |F_1F_2| = 2\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because \angle F_1PF_2 = 60^\circ,$$

$$|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos 60^\circ,$$

$$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1||PF_2| = 8 \text{ ①},$$

$$\text{又} \because \text{点} P \text{ 在双曲线 } x^2 - y^2 = 1 \text{ 上},$$

$$\therefore ||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 2,$$

$$\therefore |PF_1|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| + |PF_2|^2 = 4 \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得},$$

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = 4.$$

故答案为: 4.

【标注】 【知识点】 双曲线的定义; 余弦定理

18. 设 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a} = 1 (a > 0)$ 的两个焦点, 点 M 在双曲线上, 且满足 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$, $|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| = 4$, 则 a 的值等于 _____ .

【答案】 1

【解析】 设 $|MF_1| = m, |MF_2| = n$, 则 $|m - n| = 2a, mn = 4, m^2 + n^2 = 4(a^2 + 2a)$,

$$\therefore 4a^2 + 8 = 4(a^2 + 2a), \text{ 解得 } a = 1,$$

故答案为1.

【标注】 【知识点】 双曲线中向量相关问题 (小题)

🔗 双曲线方程的稍微复杂一丢丢的应用

19. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$, 点

$P(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (\quad)$.

A. -12

B. -2

C. 0

D. 4

【答案】C

【解析】由渐近线方程为 $y = x$ 知双曲线是等轴双曲线，

$\therefore$ 双曲线方程是 $x^2 - y^2 = 2$ ，

于是两焦点坐标分别是 $F_1(-2, 0)$ 和 $F_2(2, 0)$ ，

且 $P(\sqrt{3}, 1)$ 或 $P(\sqrt{3}, -1)$ ，

不妨令 $P(\sqrt{3}, 1)$ ，

则 $\overrightarrow{PF_1} = (-2 - \sqrt{3}, -1)$ ， $\overrightarrow{PF_2} = (2 - \sqrt{3}, -1)$ ，

$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-2 - \sqrt{3}, -1)(2 - \sqrt{3}, -1) = -(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) + 1 = 0$ 。

故选C。

【标注】【知识点】双曲线中向量相关问题（小题）

20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，点 A 在双曲线的渐近线上， $\triangle OAF$ 是边长为2的等边三角形(O 为坐标原点)，则该双曲线的方程为_____。

【答案】 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

【解析】由题意得双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ， $c = 2$ ，

$$\therefore \begin{cases} b = \sqrt{3}a \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 。

【标注】【知识点】双曲线的标准方程

离心率与渐近线的关系

21. 已知双曲线的 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线为 $2x + y = 0$ ，则该双曲线的离心率等于()。

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
C. $\sqrt{5}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】双曲线的简单性质。

解：双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x$ ，

由一条渐近线为 $2x + y = 0$ ，可得 $\frac{a}{b} = 2$ ，

$$\text{即 } a = 2b, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\text{可得 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选：A.

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

22. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，则 C 的渐近线方程为 _____.

【答案】 $y = \pm \frac{1}{2}x$

【解析】 $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 解得 } \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C \text{ 的渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x.$$

$$\text{故答案为 } y = \pm \frac{1}{2}x.$$

【标注】【知识点】双曲线的渐近线；双曲线的离心率

23. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 10，点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上，则双曲线 C 的离心率为 ().

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 焦距为 10,

$$\therefore 2c = 10,$$

$$\therefore c = 5,$$

$$\therefore \text{双曲线方程为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore \text{渐近线: } y = \pm \frac{b}{a}x,$$

又 $\because P(2, 1)$ 在渐近线上,

$$\therefore 1 = \frac{b}{a} \cdot 2,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选A.

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

24. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1 (a > \sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 60° ，则双曲线的离心率为 _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】由双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 得 $b = \sqrt{2}$ ，则渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{a}x$ ，

①两渐近线夹角为 60° ，得斜率 $k = \pm\sqrt{3}$ ，则 $\frac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{3}$ ，

$$\text{得 } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{8}{3}},$$

则 $e = \frac{c}{a} = 2$ ，但 $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$ ，舍去；

②斜率 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，得 $a = \sqrt{6}$ ，

$$\text{则 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}, e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 } e = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】双曲线的渐近线

25. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 相切，则该双曲线的离心率为 _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】∵双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 渐近线为： $bx \pm ay = 0$ ，

圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为： $(2, 0)$ ，半径为：1，

又圆与渐近线相切，所以点到直线距离公式可得： $\frac{2b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 1$ ，

$$\text{即：} a^2 = 3b^2,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【标注】【知识点】双曲线与圆结合；求双曲线的离心率

26. 若点 $(\sqrt{3}, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$ ，则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】 A

【解析】 解：由已知得，双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$ ，

又点 $(\sqrt{3}, 0)$ 到渐近线 $bx \pm ay = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，

$$\therefore \frac{|\sqrt{3}b \pm 0 \cdot a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\sqrt{3}b \pm 0 \cdot a|}{c} = \sqrt{2}, \text{ 即 } 3b^2 = 2c^2,$$

$$\text{又 } b^2 = c^2 - a^2, \therefore e = \sqrt{3},$$

故选：A.

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

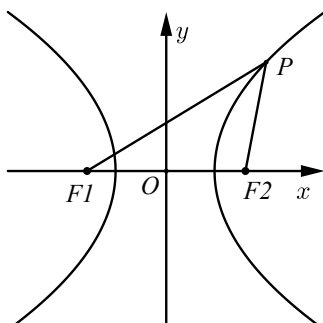
2. 双曲线性质的简单扩展

1. 双曲线的通径

(1) 定义：过双曲线的焦点且垂直于实轴的直线被双曲线截得的弦称为双曲线的**通径**

(2) 长度：无论焦点在 x 轴上还是在 y 轴上，双曲线的通径长均为 $\frac{2b^2}{a}$

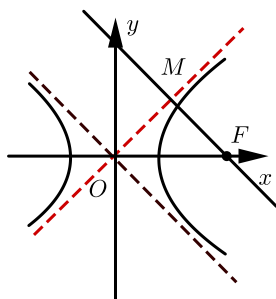
2. 焦点三角形



$$\textcircled{1} S_{\Delta F_1 P F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1 P F_2 ;$$

$$\textcircled{2} S_{\Delta F_1 P F_2} = b^2 \cot \frac{\theta}{2} (\theta = \angle F_1 P F_2) ;$$

3. 双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于虚半轴长



焦点三角形

27. 若 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线 C 上, 若 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 则 P 到 x 轴的距离为 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{15}}{15}$

【解析】 不妨设点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 C 的右支上, 且 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$,

$$\text{则 } m - n = 4, 20 = m^2 + n^2 + mn,$$

$$\therefore n^2 + 4n - \frac{4}{3} = 0,$$

$$\therefore n = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2,$$

$$\text{易得双曲线的准线为: } x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{由双曲线的第二定义可得 } \frac{n}{x_0 - \frac{4}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{8\sqrt{5}}{15},$$

$$\text{可得 } y_0 = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

【标注】 【知识点】 双曲线的标准方程; 圆锥曲线的第二定义

28. 若双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的两个焦点 F_1, F_2 , P 为双曲线上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 ().

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 由题意可知 $a = \sqrt{3}$, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{3}$,

$$|F_1F_2| = 2c = 6, \angle F_1PF_2 = 120^\circ,$$

$$\text{由余弦定理得 } |F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| \cdot \cos 120^\circ,$$

$$\text{即 } 36 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + |PF_1| \cdot |PF_2|,$$

$$\text{解得 } |PF_2| = \sqrt{11} - \sqrt{3}, |PF_1| = \sqrt{11} + \sqrt{3},$$

$$S = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 三角形面积公式

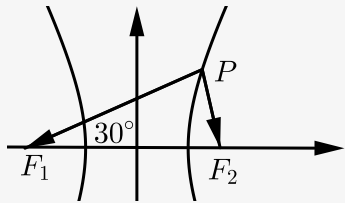
又 $|PF_1| + |PF_2| = 6a$ ，解得 $|PF_1| = 4a$ ， $|PF_2| = 2a$ ，

则 $\angle PF_1F_2$ 是 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° ，

$$\therefore |PF_2|^2 = |PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |F_1F_2| \cos 30^\circ,$$

$$\therefore (2a)^2 = (4a)^2 + (2c)^2 - 2 \times 4a \times 2c = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

化为 $e^2 - 2\sqrt{3}e + 3 = 0$ ，解得 $e = \sqrt{3}$ 。



故选C。

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

32. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 在第一象限的交点， F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点，若 $\tan \angle PF_2F_1 = 3$ ，则双曲线的离心率为（ ）。

A. $\sqrt{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 根据双曲线定义：

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a,$$

$$\tan \angle PF_2F_1 = 3,$$

$$\therefore |PF_1| = 3|PF_2|,$$

$$\therefore |PF_1| = 3a, |PF_2| = a,$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = c,$$

$\therefore F_1F_2$ 是圆的直径，

$$\therefore \angle F_1PF_2 = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt} \triangle F_1PF_2$ 中，

$$(3a)^2 + a^2 = (2c)^2,$$

$$\text{得 } e = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

 途径

33.

设直线 $y = kx$ 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A, B 两点, 分别过 A, B 向 x 轴作垂线, 若垂足恰为双曲线的两个焦点, 则实数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\pm \frac{3}{2}$

【解析】 将直线与双曲线方程联立,
$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

化简整理得 $(3 - k^2)x^2 = 3(*)$

因为分别过 A, B 向 x 轴作垂线, 垂足恰为双曲线的两个焦点,

故方程的两个根为 ± 2 .

代入方程 $(*)$,

得 $k = \pm \frac{3}{2}$.

故答案为: $\pm \frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】直线与圆锥曲线的位置关系判断; 直线和双曲线的位置关系

焦点到渐近线的距离

34. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 有相同的渐近线, 且经过点 $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 求双曲线 C 的实轴长, 离心率, 焦点到渐近线的距离.

【答案】 (1) $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because$ 双曲线 C 与双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 有相同的渐近线,

$\therefore$ 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = \lambda (\lambda \neq 0)$,

代入 $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}$,

故双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 由方程得 $a = 1, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}$, 故离心率 $e = \sqrt{3}$, 实轴长为 2,

其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$, 焦点 $(\sqrt{3}, 0)$,

焦点到渐近线距离为: $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1+2}} = \sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】双曲线的顶点与轴; 求双曲线的离心率; 双曲线的渐近线

35. 以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点为圆心，且与双曲线的渐近线相切的圆的标准方程为 _____ .

【答案】 $(x - 4)^2 + y^2 = 12$

【解析】 由已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 中，
 $c^2 = 4 + 12 = 16$ ， $c = 4$.
焦点在 x 轴上，故圆心 $(4, 0)$ ，
渐近线方程： $y = \pm\sqrt{3}x$ ，
又圆与渐近线相切，
 $\therefore r = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore$ 圆的方程为 $(x - 4)^2 + y^2 = 12$.

【标注】 【知识点】圆的标准方程问题；双曲线的渐近线