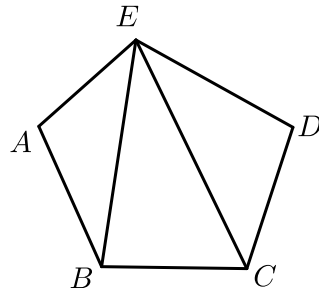


计数原理2

一、选择题

1. 如图，给7条线段的5个端点涂色，要求同一条线段的两个端点不能同色，现有4种不同的颜色可供选择，则不同的涂色方法种数有（ ）。



- A. 24 B. 48 C. 96 D. 120

【答案】 C

【解析】 由于同一条线段的两个端点不能同色，因此可分类如下．第一类：若 A, D 相同，先涂 E 有4种涂法，再涂 A, D 有3种涂法，再涂 B 有2种涂法， C 只有一种涂法，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ （种）；第二类：若 A, D 不同，先涂 E 有4种涂法，再涂 A 有3种涂法，再涂 D 有2种涂法，当 B 和 D 相同时， C 有2种涂法，当 B 和 D 不同时， C 只有1种涂法，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2 + 1) = 72$ （种）．根据分类加法计数原理可得，不同的涂色方法共有 $24 + 72 = 96$ （种）．
故选C．

【标注】 【知识点】 染色问题

2. 设 $(3x - 1)^8 = a_0 + a_1x + \cdots + a_7x^7 + a_8x^8$ ，则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8$ 等于（ ）．
A. 122 B. 144 C. 255 D. 366

【答案】 C

【解析】 取 $x = 0$ ， $(-1)^8 = a_0$ ， $a_0 = 1$ ，
取 $x = 1$ ， $2^8 = a_0 + a_1 + \cdots + a_8$ ，
 $\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 2^8 - 1$ ．

故选C.

【标注】【知识点】赋值问题；二项式定理的展开式

3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为().

A. 2^{12}

B. 2^{11}

C. 2^{10}

D. 2^9

【答案】D

【解析】由题意可得，二项式的展开式满足

$$T_{r+1} = C_n^r x^r, C_n^3 = C_n^7, \text{ 因此 } n = 10.$$

令 $x = 1$ ，则 $(1+x)^n = 2^{10}$ ，即展开式中所有项的二项式系数和为 2^{10} ；

令 $x = -1$ ，则 $(1+x)^n = 0$ ，即展开式中奇数项的二项式系数与偶数项的二项式系数之差为0，

因此奇数项的二项式系数和为 $\frac{1}{2}(2^{10} + 0) = 2^9$ 。

故选D.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

4. 用4种不同的颜色涂入图中的矩形A, B, C, D中，要求相邻的矩形涂色不同，则不同的涂色方法共有().

A	B
C	
D	

A. 12种

B. 24种

C. 48种

D. 72种

【答案】D

【解析】根据题意，首先涂A有 $C_4^1 = 4$ 种涂法，

则涂B有 $C_3^1 = 3$ 种涂法，C与A, B相邻，则C有 $C_2^1 = 2$ 种涂法，

D只与C相邻，则D有 $C_3^1 = 3$ 种涂法，

所以，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ 种涂法。

故选D.

【标注】【知识点】染色问题

5. 若 $(1+2x)(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ 的值为 () .

A. -2

B. -3

C. 253

D. 126

【答案】 C

【解析】 $\because (1+2x)(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$,

$$\therefore a_8 = 2 \cdot C_7^7 \cdot (-2)^7 = -256.$$

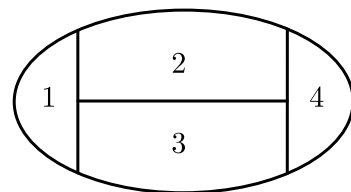
$$\text{令 } x = 1 \text{ 得: } (1+2)(1-2)^7 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7 + a_8 = -3,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = -3 - a_8 = -3 + 256 = 253.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

6. 用5种不同的颜色给图中4个区域涂色, 如果每个区域涂一种颜色, 相邻区域不能同色, 那么涂色的方法有 () 种.



A. 180

B. 120

C. 240

D. 72

【答案】 A

【解析】 ①区域1、4同色.

即在5种颜色中任选3种, 涂在3个区域, 有 $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 种涂法.

②区域1、4不同色.

即在5中颜色中任选4种, 涂在4个区域, 有 $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种涂法.

综上, 共有 $60 + 120 = 180$ 种涂法.

【标注】 【知识点】 特殊位置优先法

7. 若将函数 $f(x) = x^5$ 表示为 $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_5(1+x)^5$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_5$ 为实数, 则 $a_3 =$ () .

A. 15

B. 5

C. 10

D. 20

【答案】 C

【解析】由题意可得：

$$f(x) = [-1 + (x+1)]^5 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_5(1+x)^5,$$

$$\therefore a_3 = (-1)^2 \cdot C_5^3 = 10.$$

故选C.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

8. 用0, 1, 2, 3, 4, 5这6个数字, 可以组成没有重复数字的四位数的个数是().

A. 360

B. 300

C. 240

D. 180

【答案】B

【解析】根据题意：分2种情况讨论，

当这四位数无0时：从除0以外5个中选4个全排有 $C_5^4 A_4^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 种，

当这四位数中有0时：从除0以外再选3个数，千位数除0以外有3种选择，剩下的三位数全

$$\text{排有 } C_5^3 \cdot 3 \cdot A_3^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 180 \text{种，}$$

故总数有 $180 + 120 = 300$ 种.

故选B.

【标注】【知识点】数字问题

二、填空题

9. $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，常数项为 _____.

【答案】-40

【解析】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中常数项是 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中的 $\frac{1}{x}$ 项与 x 的乘积，加上含 x 项与 $-\frac{1}{x}$ 的乘积.

$$\text{由 } \left(2x + \frac{1}{x}\right)^5 \text{ 展开式的通项公式为 } T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = 2^{5-r} \cdot C_5^r \cdot x^{5-2r},$$

$$\text{令 } 5 - 2r = -1, \text{ 解得 } r = 3, \therefore T_4 = 2^2 \cdot C_5^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{40}{x}.$$

$$\text{令 } 5 - 2r = 1, \text{ 解得 } r = 2, \therefore T_3 = 2^3 \cdot C_5^2 \cdot x = 80x.$$

$$\text{所求展开式的常数项为 } \frac{40}{x} \cdot x + 80x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = 40 - 80 = -40.$$

故答案为：-40.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

10. 若 $f(x) = (x+1)^6 - (x-1)^5$ 的展开式为 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5 + a_6x^6$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_5$ 的值是 _____ (用数字作答) .

【答案】 61

【解析】 $\because f(x) = (x+1)^6 - (x-1)^5$ 的展开式为 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5 + a_6x^6$,
令 $x = 0$, 可得 $a_0 = 2$, 再根据 $a_6 = C_6^6 = 1$,
则令 $x = 1$ 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + a_6 = 64$,
 $\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 61$.
故答案为 : 61 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

11. 若 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大 , 则展开式中的常数项是 _____ .

【答案】 180

【解析】 如果 n 是奇数 , 那么是中间两项的二项式系数最大 , 如果 n 是偶数 , 那么是最中间项的二项式系数最大 .
 $\because$ 若 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大 ,
 $\therefore n = 10$,
 $\therefore \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式的通项为
 $C_{10}^r x^{\frac{10-r}{2}} \times (-1)^r \times 2^r \times x^{-2r} = C_{10}^r \times (-2)^r \times x^{\frac{10-r}{2}-2r}$,
令 $\frac{10-r}{2} - 2r = 0$, 可得 $r = 2$,
 $\therefore$ 展开式中的常数项等于 $C_{10}^2 \times 2^2 = 180$.
故答案是 180 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

12. 用 1 , 2 , 3 , 4 , 5 这 5 个数字 ,
(1) 可以组成 _____ 个数字不重复的四位数 .
(2) 可以组成 _____ 个数字不重复的四位偶数 .
(3) 可以组成 _____ 个大于 1300 的数字不重复的四位数 .

(4) 可以组成 _____ 个小于2200的数字不重复的四位数 .

【答案】 (1) 120

(2) 48

(3) 114

(4) 30

【解析】 (1) 由于数字 不允许重复 , 因此个位数字有5种选法 , 十位数字有4种选法 , 百位数字有3种选法 , 千位数字有2种选法 , 由分步计数原理得 , 所求四位数共有
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 个 .

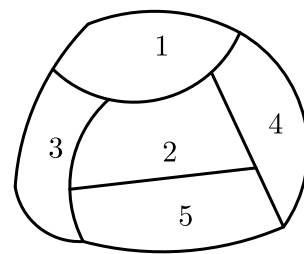
(2) 个位有2, 4两种选择 , 个位选定后 , 依次十位有4种 , 百位有3种 , 千位有2种 , 由乘法原理 , 共有 $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ 个 .

(3) 分成千位是1的与千位是2, 3, 4, 5的 , 千位为1的 , 百数只能为3, 4, 5中的一个 , 十位与个数不限 , 共有 $1 \times 3 \times 3 \times 2 = 18$ 个 ; 千位大于1的 , 其它无限制 , 共有 $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ 个 , 故共有 $18 + 96 = 114$ 个 .

(4) 千位为1的 : $4 \times 3 \times 2 = 24$ 个 ; 千位为2的 , 百位必须为1 , 有 : $3 \times 2 = 6$ 个 ; 由加法原理知共有 $24 + 6 = 30$ 个 .

【标注】【知识点】分类加法计数原理 ; 分步乘法计数原理

13. 用4个不同的颜色给图中五个区域涂色 , 要求相邻区域不同色 , 共 _____ 种方法 .



【答案】 72

【解析】 略

【标注】【知识点】分类加法计数原理 ; 分步乘法计数原理 ; 加法原理与乘法原理的综合运用

三、解答题

14. 设 $(1-2x)^{2013} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2013}x^{2013} (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}$ 的值 .

(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2013}$ 的值 .

(3) 求 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2013}|$ 的值 .

【答案】 (1) -1 .

(2) $-\frac{1+3^{2013}}{2}$.

(3) 3^{2013} .

【解析】 (1) 令 $x = 1$,

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013} = (1-2)^{2013} = -1, \text{ ① .}$$

(2) 令 $x = -1$, 得 : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2012} - a_{2013} = [1 - (-2)]^{2013} = 3^{2013}$, ② ,

$$\text{由 } \frac{\text{①} - \text{②}}{2} \text{ 得 } a_1 + a_3 + \cdots + a_{2013} = \frac{-1 - 3^{2013}}{2} = -\frac{1 + 3^{2013}}{2} .$$

(3) $a_n = C_{2013}^n (-2)^n$,

$\therefore n$ 为偶数 , $a_n > 0$, n 为奇数 , $a_n < 0$,

$$\therefore |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2013}|$$

$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2012} - a_{2013}$$

$$= 3^{2013} \text{ (由 (2) 知) .}$$

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数 ; 二项式定理的展开式 ; 求二项式展开式的特定项 ; 赋值问题

15. 用 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 这七个数字 :

(1) 能组成多少个无重复数字的四位奇数 ?

(2) 能组成多少个无重复数字且为 5 的倍数的五位数 ?

(3) 能组成多少个无重复数字且比 31560 大的五位数 ?

【答案】 (1) 300 .

(2) 660 .

(3) 1334 .

【标注】 【知识点】 分步乘法计数原理 ; 加法原理与乘法原理的综合运用

16. 已知在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的展开式中 , 第 6 项为常数项 .

- (1) 求 n 的值 .
- (2) 求展开式的所有项的系数之和 .
- (3) 求展开式中所有的有理项 .

【答案】 (1) $n = 10$.

(2) $\frac{1}{1024}$.

(3) $T_3 = \frac{45}{4}x^2$; $T_6 = -\frac{63}{8}$; $T_9 = \frac{45}{256} \cdot x^{-2}$.

【解析】 (1) 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)的展开式中, 第6项为 $T_6 = C_n^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot x^{\frac{n-10}{3}}$ 为常数项 ,
 $\therefore \frac{n-10}{3} = 0$,
 $\therefore n = 10$.

(2) 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) = $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 的展开式中 ,
 令 $x = 1$, 可得展开式的所有项的系数之和为 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$.

(3) 二项式 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)的展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_{10}^r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{\frac{10-2r}{3}} ,$$

令 $\frac{10-2r}{3}$ 为整数, 可得 $r = 2, 5, 8$,

故有理项分别为 $T_3 = C_{10}^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 = \frac{45}{4}x^2$,

$$T_6 = C_{10}^5 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot x^0 = -\frac{63}{8} ; T_9 = C_{10}^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \times x^{-2} = \frac{45}{256} \cdot x^{-2} .$$

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

【知识点】赋值问题

【知识点】求二项式展开式的特定项

【素养】数学运算

17. 由数字1、2、3、4、5、6组成无重复数字的数中, 求 :

- (1) 六位偶数的个数 ;
- (2) 奇数字从左到右, 从小到大依次排列 (不一定相邻) 的六位数的个数 ;
- (3) 数字1, 3都不与5相邻的六位数的个数 .

【答案】 (1) 360 .

(2) 120 .

(3) 288 .

【解析】(1) $C_3^1 \cdot A_5^5 = 360$,

故答案为 : 360 .

(2) 相当于6个空中 , 按照不一样顺序排列3个偶数 , $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$,

故答案为 : 120 .

(3) 当5在十万位时 , 可以有 $A_3^1 \cdot A_4^4 = 72$ 种 ,

当5在万位时 , 可以有 $A_3^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种 ,

当5在千位时 , 可以有 $A_3^2 \cdot A_3^3 = 36$,

当5在百位 , 十位 , 个位时 , 分别和在千位 , 万位 , 十万位相同 ,

所以总共288种 .

故答案为 : 288 .

【标注】【知识点】组合 ; 插空法 ; 加法原理与乘法原理的综合运用

18. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中第5项的系数与第3项的系数的比是10 : 1 .

(1) 求展开式中各项系数的和.

(2) 求展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项.

(3) 求展开式中系数最大的项和二项式系数最大的项 .

【答案】(1) 1.

(2) $T_2 = -16x^{\frac{3}{2}}$.

(3) $1792 \cdot \frac{1}{x^{11}}, 1120x^{-6}$.

【解析】(1) 由题意知 , 第5项系数为 $C_n^4 \cdot (-2)^4$, 第3项的系数为 $C_n^2 \cdot (-2)^2$, 则有

$$C_n^4 \cdot (-2)^4 = 10C_n^2 \cdot (-2)^2, \text{ 解得 } n = 8 .$$

令 $x = 1$ 得各项系数的和为 $(1 - 2)^8 = 1$.

(2) 通项公式 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_8^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{8-r}{2}-2r}$, 令

$$\frac{8-r}{2} - 2r = \frac{3}{2} ,$$

则 $r = 1$, 故展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项为 $T_2 = -16x^{\frac{3}{2}}$.

(3) 设展开式中的第 r 项 , 第 $r + 1$ 项 , 第 $r + 2$ 项的系数绝对值分别为 $C_8^{r-1} \cdot 2^{r-1}$,

$C_8^r \cdot 2^r$, $C_8^{r-1} \cdot 2^{r+1}$, 若第 $r + 1$ 项的系数绝对值最大 , 则

$$C_8^{r-1} \cdot 2^{r-1} \leq C_8^r \cdot 2^r, C_8^{r+1} \cdot 2^{r+1} \leq C_8^r \cdot 2^r, \text{ 解得 } 5 \leq r \leq 6 ,$$

$\therefore$ 系数最大的项为 $T_7 = 1792 \cdot \frac{1}{x^{11}}$; 二项式系数最大项为

$$T_5 = C_8^4 x^2 \left(-\frac{2}{x^2}\right)^4 = 1120x^{-6} .$$

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式；赋值问题；求二项式展开式的特定项；二项式系数的性质