

计数原理1

一、选择题

1. 从数字1, 2, 3, 4, 5中任取2个, 组成一个没有重复数字的两位数, 则这个两位数大于30的概率是 () .
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】 C

【解析】 从数字1, 2, 3, 4, 5中任取2个, 组成一个没有重复数字的两位数共有 $A_5^2 = 20$ 个, 其中这个两位数小于30的个数为 $C_2^1 \cdot C_4^1 = 8$ 个 (十位1, 2中任选1个, 个位其余4个数选1个), 故所求概率 $P = 1 - \frac{8}{20} = \frac{3}{5}$. 故选: C.

【标注】 【知识点】 古典概型的概率计算 (涉及计数原理)

2. 我们把各位数字之和等于6的三位数称为“吉祥数”, 例如123就是一个“吉祥数”, 则这样的“吉祥数”一共有 () .
- A. 28个 B. 21个 C. 35个 D. 56个

【答案】 B

【解析】 方法一: 由 $1+1+4=6$, $1+2+3=6$, $2+2+2=6$, $0+1+5=6$, $0+2+4=6$, $0+3+3=6$, $0+0+6=6$, $\therefore$ 分为7类, 分别求出每一类的三位数, 再根据分类计数原理得到答案.

方法二: 因为 $1+1+4=6$, $1+2+3=6$, $2+2+2=6$, $0+1+5=6$, $0+2+4=6$, $0+3+3=6$, $0+0+6=6$, 所以可以分为7类, 当三个位数字为1, 1, 4时, 三位数有3个, 当三个位数字为1, 2, 3时, 三位数有 $A_3^3 = 6$ 个, 当三个位数字为2, 2, 2时, 三位数有1个, 当三个位数字为0, 1, 5时, 三位数有 $A_2^1 A_2^2 = 4$ 个,

当三个位数字为0, 2, 4时, 三位数有 $A_2^1 A_2^2 = 4$ 个,
 当三个位数字为0, 3, 3时, 三位数有2个,
 当三个位数字为0, 0, 6时, 三位数有1个,
 根据分类计数原理得三位数共有 $3 + 6 + 1 + 4 + 4 + 2 + 1 = 21$.
 故选B.

【标注】【知识点】计数原理综合

3. 某公司有五个不同部门, 现有4名在校大学生来该公司实习, 要求安排到该公司的两个部门, 且每个部门安排两名, 则不同的安排方案种数为 ().
- A. 40 B. 60 C. 120 D. 240

【答案】 B

【解析】 先将4人分成2组, 每组2人, 共有 $\frac{C_4^2}{2} = 3$ 种,
 再从5个部门任选2个, 并将这两组人安排进去, 有 $A_5^2 = 20$ 种,
 故一共有 $3 \times 20 = 60$ 种.
 故选B.

【标注】【知识点】分组分配法

4. 教室的图书角摆放了一些阅读书目, 其中有3本相同的论语、6本互不相同的近代文学名著, 现从这9本书中选出3本, 则不同的选法种数为 ().
- A. 84 B. 42 C. 41 D. 35

【答案】 B

【解析】 由题意知: 选3本论语有1种选法; 选2本论语, 1本文学名著有 C_6^1 种; 选1本论语, 2本文学名著有 C_6^2 种; 选3本文学名著有 C_6^3 种. 共有 $1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 = 42$ 种.
 故选B.

【标注】【知识点】分类加法计数原理

5. 从5名男生和4名女生中选出4人去参加辩论比赛, 4人中既有男生又有女生的不同选法共有 ().
- A. 80种 B. 100种 C. 120种 D. 126种

【答案】 C

【解析】 根据题意，从5名男生和4名女生共9人中选出4人去参加辩论比赛，有 $C_9^4 = 126$ 种选法，其中只有男生没有女生的选法有 $C_5^4 = 5$ 种，只有女生没有男生的选法有 $C_4^4 = 1$ 种，则4人中既有男生又有女生的不同选法共有 $126 - 5 - 1 = 120$ 种。故选：C。

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】 分组分配法

6. 某班要从4名男生和2名女生中选派4人参加某次社区服务，如果要求至少有1名女生，则不同选派方案种数为（ ）。

A. 8

B. 14

C. 20

D. 24

【答案】 B

【解析】 至少有一名女生可以分两类，一类是只有一名女生 $C_2^1 C_4^3 = 8$ 种，一类是有两名女生 $C_2^2 C_4^2 = 6$ 种，共14种。故选B。

【标注】【知识点】分类加法计数原理

7. 某班星期一上午安排5节课，若数学2节，语文、物理、化学各1节，且物理、化学不相邻，2节数学相邻，则星期一上午不同课程安排种数为（ ）。

A. 6

B. 12

C. 24

D. 48

【答案】 B

【解析】 2节数学课相邻可当作一个整体即为一个元素，先与一节语文课全排即 A_2^2 ，物理化学不相邻，用插空法，数学整体与语文全排有3个空位，故排物理化学为 A_3^2 ，所以答案为 $A_2^2 \cdot A_3^2 = 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ 。故选B。

【标注】【知识点】插空法

8.

从6名志愿者中选出4人，分别从事搜救、医疗、心理辅导、后勤四种不同工作，若其中甲、乙两名志愿者都不能从事心理辅导工作，则不同的选派方案共有（ ）.

- A. 280种 B. 240种 C. 180种 D. 96种

【答案】 B

【解析】 由于甲乙有特殊条件，故先分配甲乙. 若不选择甲乙，则剩余四人均可做剩下四项工作，共有方案 $A_4^4 = 24$ 种. 若选择甲乙中的一个，则有 $2 \times C_4^3 = 8$ 种选择方案，分配工作时，甲或乙有3种分配方案，其余三人做剩余三项，共有方案 $3 \times 8 \times A_3^3 = 144$ 种. 若甲乙两人都选，则有 $C_4^2 = 6$ 种选择方案，分配工作时，有方案 $A_2^2 A_3^2 = 12$ 种，共有方案 $12 \times 6 = 72$ 种，综上所述，共有选派 $24 + 144 + 72 = 240$ 种.

【标注】 【知识点】特殊元素优先法

9. 将4本完全相同的小说，1本诗集全部分给4名同学，每名同学至少1本书，则不同分法有（ ）.

- A. 24种 B. 28种 C. 32种 D. 16种

【答案】 D

【解析】 第一类，每位同学各分1本小说，再把1本诗集全部分给4名同学任意一个，共有4种方法，
第二类，这本诗集单独分给其中一位同学，4相同的小说，分给另外3个同学，共有 $C_4^1 C_3^1 = 12$ 种，
根据分类计数原理，共有 $4 + 12 = 16$ 种，
故选：D.

【标注】 【知识点】简单的组合问题；分类加法计数原理

10. 我市拟向新疆哈密地区的三所中学派出5名教师支教，要求每所中学至少派遣一名教师，则不同的派出方法有（ ）.

- A. 300种 B. 150种 C. 120种 D. 90种

【答案】 B

【解析】 将5名老师分为三队，有“一人，一人，三人”和“一人，两人，两人”，两种方式，
第一种方式：先选一个学校，再选三人去该校，共有 $C_3^1 C_5^3$ 种选法，剩下两人分配到剩余的两校有 A_2^2 种选法；

第二种方式：先选一个学校，再选一人去该校，共有 $C_3^1 C_5^1$ 种选法，剩余两校任一学校从四人选两人，剩余两人自动分配到另一学校有 C_4^2 种选法，
故共有 $C_3^1 C_5^3 A_2^2 + C_3^1 C_5^1 C_4^2 = 150$ 种分配方式。
故选：B。

【标注】【知识点】计数原理综合

二、填空题

11. 从3男2女共5名学生中任选2人参加座谈会，则选出的2人恰好为1男1女的概率为 _____。

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】从3男2女共5名学生中任选2人参加座谈会，

基本事件总数 $n = C_5^2 = 10$ ，

选出的2人恰好为1男1女包含的基本事件个数 $m = C_2^1 C_3^1 = \frac{1}{6}$ ，

∴选出的2人恰好为1男1女的概率 $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 。

故答案为： $\frac{3}{5}$ 。

【标注】【知识点】古典概型

12. 从7名志愿者中安排6人在周六、周日两天参加社区公益活动。若每天安排3人，则不同的安排方案共有_____种（用数字作答）。

【答案】 140

【解析】方法一： $C_7^3 C_4^3 = 140$ 。

方法二：从7名志愿者中选择3人参加周六的社区公益活动有 C_7^3 种安排方法，再在剩下的4人中选择3人参加周日的社区公益活动有 C_4^3 种安排方法，由分步计数原理可得不同的安排方案共有 $C_7^3 C_4^3 = 35 \times 4 = 140$ 种。

故答案为：140。

【标注】【知识点】组合

13.

用0, 1, 2, ..., 9这十个数字组成无重复数字的四位数, 若千位数字与个位数字之差的绝对值是2, 则这样的四位数共有 _____ 个?

【答案】 840

【解析】 根据题意, 0到9十个数字中之差的绝对值等于2的情况有8种: 0与2, 1与3, 2与4, 3与5, 4与6, 5与7, 6与8, 7与9.

分2种情况讨论: ①当个位与千位数字为0, 2时, 有 $A_8^2 = 56$ 种,

②当个位与千位数字为1与3, 2与4, 3与5, 4与6, 5与7, 6与8, 7与9时, 有

$7A_2^2 A_8^2 = 784$ 种,

共 $784 + 56 = 840$ 种.

故答案为: 840.

【标注】 【知识点】特殊位置优先法; 加法原理与乘法原理的综合运用; 分步乘法计数原理; 分类加法计数原理

14. 用数字0, 1, 2, 3, 4, 5组成没有重复数字, 且至多有两个数字是偶数的四位, 这样的四位数一共有 _____ 个. (用数字作答)

【答案】 246

【解析】 采用间接法, 所有不重复的四位数有 $A_6^4 - A_5^3$ 个, 有3个是偶数的四位数个数有 $C_3^1(A_4^4 - A_3^3)$, $\therefore (A_6^4 - A_5^3) - C_3^1(A_4^4 - A_3^3) = 300 - 54 = 246$.

【标注】 【知识点】特殊位置优先法

【素养】 数学运算

15. 将A, B, C, D, E五个字母排成一排, 若A与B相邻, 且A与C不相邻, 则不同的排法共有 _____ 种.

【答案】 36

【解析】 依题意, 可分三步, 先排D, E, 有 A_2^2 种方法, 产生3个空位, 将AB捆绑, 看作一个元素, 插入三个空位之一, 有3种方法, 再将AB松绑, 有 A_2^2 种方法, 这时AB、D、E产生四个空位, 最后将C插入与A不相邻的三个空位之一, 有3种方法, 根据分步乘法计数原理得: 共有 $A_2^2 \cdot A_3^1 \cdot A_2^2 \cdot A_3^1 = 36$ 种, 故答案为: 36.

【标注】【知识点】捆绑法

16. 把学数学的2人，学语文的2人，学英语的1人共5名毕业生分配到A，B，C三所学校，每所学校至少1人．若A校不招收同一学科的毕业生，则不同的分配方法共有 _____ 种．

【答案】 126

【解析】 ①当A校选一名时有 $C_5^1 = 5$ 种，另外4人分为(3,1)和(2,2)两组，有 $C_4^3 A_2^2 + C_4^2 = 14$ 种，故有 $5 \times 14 = 70$ 种，
②当A校选两名时有 $C_5^2 - 1 - 1 = 8$ 种，另外3人分为(2,1)一组，有 $C_3^2 \cdot A_2^2 = 6$ 种，故有 $8 \times 6 = 48$ 种，
③当A校选三名时有 $C_2^1 C_2^1 = 4$ 种，另外2人分为(1,1)一组，有 $C_2^1 = 2$ 种，故有 $4 \times 2 = 8$ 种，
故共有 $70 + 48 + 8 = 126$ 种．
故答案为：126

【标注】【知识点】加法原理与乘法原理的综合运用；分步乘法计数原理

17. 一个口袋内有5个不同的红球，4个不同的白球．若取一个红球记2分，取一个白球记1分，从中任取4个球，使总分不少于7分的取法有 _____ 种．

【答案】 45

【解析】 根据题意，分析可得从中任取4个球，使总分不少于7分的情况有4个红球或3个红球和1个白球；
则分2种情况进行分析：
①若取出的4个球都是红球即4个红球，有 $C_5^4 = 5$ 种取法，
②若取出的4个球是3个红球和1个白球，有 $C_5^3 C_4^1 = 40$ 种取法，
则一共有 $40 + 5 = 45$ 种不同的取法．

【标注】【知识点】简单的组合问题；分类加法计数原理

18. 将7个座位连成一排，安排4个人就座，恰有两个空位相邻的不同坐法有 _____ ．

【答案】 480

【解析】 分两步安排：

①将4人全排列，安排在4个位置，有 $A_4^4 = 24$ 种情况．

②4人排好后有5个空位，在其中任选2个，一个空位安排2个空座位，另一个安排一个空座位，有 $A_5^2 = 20$ 情况．

则恰有两个空位相邻的不同坐法有 $24 \times 20 = 480$ 种．

【标注】【知识点】插空法

19. 将8本不同的书分成4堆，每堆2本，有 _____ 种不同的分法．

【答案】 105

【解析】 $\frac{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_4^4} = \frac{28 \times 15 \times 6 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 105$ ．

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】 分组分配法

20. 某车队有7辆车，现在要调出4辆，再按一定顺序出去执行任务．要求甲、乙两车必须参加而且甲车在乙车前开出，那么不同的调度方案有 _____ 种．（用数字作答）

【答案】 120

【解析】 方法一：由题意知，本题是一个计数原理的应用，

当甲车排第①个时，乙车可排2、3、4号，有3种选择；

当甲车排第②个时，乙车可排3、4号，有2种选择；

当甲车排第③个时，乙车只可排4号，只有1种选择；

除甲、乙两车外，在其余5辆车中任意选取2辆按顺序排列，有 A_5^2 种选法；

因此共有： $(3 + 2 + 1)A_5^2 = 120$ 种不同的调度方案．

故答案为：120．

方法二：由甲乙的对称性，甲比乙先开和乙比甲先开的方案数应该一样，

$C_5^2 A_4^4 \div 2 = 120$ ．

【标注】【知识点】分步乘法计数原理；分类加法计数原理；加法原理与乘法原理的综合运用

三、 解答题

21. 学校田径队有男运动员6名，女运动员4名，其中男女队长各1名．现选派5人外出比赛，试分别计算下列情形中各有多少种选派方法？
- (1) 男运动员3名，女运动员2名．
 - (2) 至少有1名女运动员．
 - (3) 既要有队长，又要有女运动员．

【答案】 (1) 120 .

(2) 246 .

(3) 191 .

【解析】 (1) $C_6^3 C_4^2 = 20 \times 6 = 120$.

故答案为：120 .

(2) 所有选法共 $C_{10}^5 = 252$ 种，没有女运动员的选法有 $C_6^5 = 6$ 种，
则至少有1名女运动员的选法共 $252 - 6 = 246$ 种 .

故答案为：246 .

(3) 有女队长，共 $C_9^4 = 126$ 种选派方法，

有男队长没有女队长，有女运动员的选法共 $C_8^4 - C_5^4 = 70 - 5 = 65$ 种，

则既要有队长，又要有女运动员的选法共 $126 + 65 = 191$ 种 .

故答案为：191 .

【标注】【知识点】排除法