

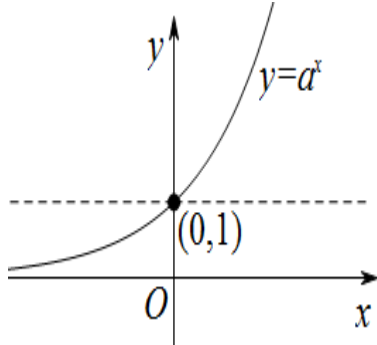
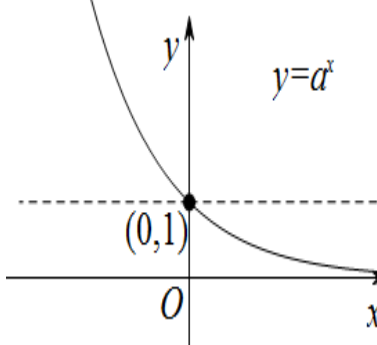
计数原理1

一轮整合计划

导数的恒能成立与最值的关系

- (1) $\forall x \in (a, b), f(x) > k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > k$;
- (2) $\forall x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0$;
- (3) $\forall x \in (a, b), f(x) < k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < k$;
- (4) $\forall x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} < 0$.
- (5) $\exists x \in (a, b), f(x) > k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} > k$;
- (6) $\exists x \in (a, b), f(x) > g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0$;
- (7) $\exists x \in (a, b), f(x) < k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} < k$;
- (8) $\exists x \in (a, b), f(x) < g(x)$ 成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} < 0$.
- (9) $\forall x_1, x_2 \in D, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq k$;
- (10) $\forall x_1, x_2 \in (a, b), f(x_1) < g(x_2)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$;
- (11) $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) > g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > g(x)_{\min}$;
- (12) $\forall x_1 \in (a, b), \exists x_2 \in (a, b), f(x_1) = g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max} \\ f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min} \end{cases}$;
- $\Leftrightarrow \{y|y = f(x), x \in (a, b)\} \subseteq \{y|y = g(x), x \in (a, b)\}$.

指数函数的性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
顶点	$(0, 1)$	$(0, 1)$
单调性	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

一、 两个基本计数原理

分类加法计数原理与分步乘法计数原理，都涉及完成一件事的不同方法的种数．它们的区别在于：分类加法计数原理与分类有关，各种方法相互独立，用其中的任一种方法都可以完成这件事；分步乘法计数原理与分步有关，各个步骤相互依存，只有各个步骤都完成了，这件事才算完成．

1. 分类加法计数原理

完成一件事，可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法．那么，完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法．(也称加法原理)

1. 已知非空集合 A, B 满足以下两个条件：

① $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $A \cap B = \emptyset$ ；

② 若 $x \in A$ ，则 $x + 1 \in B$ ，

则有序集合对 (A, B) 的个数为 () ．

A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】 A

【解析】 若集合 A 中只有1个元素, 则 $A = \{1\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$;

$A = \{2\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$;

$A = \{3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$;

$A = \{4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$;

$A = \{5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

若集合 A 中有2个元素, 则 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$;

$A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$;

$A = \{1, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$;

$A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$;

$A = \{2, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$;

$A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$;

若集合 A 中有3个元素, 则 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$;

综上, 有序集合对 (A, B) 的个数为12个.

故选A.

【标注】【知识点】集合中元素的个数

2. 已知集合 $M = \{-2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6\}$, 依次从集合 M , N 中各取出一个数分别作为点 P 的横坐标和纵坐标, 则在平面直角坐标系中位于第一、二象限内的点 P 的个数是().

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】 D

【解析】 分两类:

第一类: M 中的元素作横坐标, N 中的元素作纵坐标, 则在第一、二象限内的点有

$2 \times 2 = 4$ 个.

第二类: N 中的元素作横坐标, M 中的元素作纵坐标, 则在第一、二象限内的点有3个.

则共有 $4 + 3 = 7$ 个.

故选D.

【标注】【知识点】分类加法计数原理

3. 给定全集 U , 非空集合 A, B 满足 $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, 且集合 A 中的最大元素小于集合 B 中的最小元素, 则称 (A, B) 为 U 的一个有序子集对. 若全集 $U = \{2, 3, 6, 7, 9\}$, 则 U 的有序子集对的个数为().

【答案】B

【解析】 A 是最大元素2, B 为 $\{3, 6, 7, 9\}$ 的非空子集数 $2^4 - 1 = 15$, 共 $1 \times 15 = 15$ 种,
 A 是最大元素3, B 为 $\{6, 7, 9\}$ 的非空子集数 $2^3 - 1 = 7$, A 有2种, 共 $2 \times 7 = 14$ 种,
 A 是最大元素6, B 为 $\{7, 9\}$ 的非空子集数 $2^2 - 1 = 3$, A 有4种, 共 $4 \times 3 = 12$ 种,
 A 是最大元素7, $B = \{9\}$, A 有8种, 共 $8 \times 1 = 8$ 种,
 综上: 共 $15 + 14 + 12 + 8 = 49$ 种. 选B.

【标注】【知识点】分类加法计数原理

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要经过 n 个步骤, 缺一不可, 做第一步有 m_1 种方法, 做第二步有 m_2 种方法, …… , 做第 n 步有 m_n 种方法. 那么, 完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种方法. (也称乘法原理)

4. 完成下列各题.

- (1) 将1, 2, 3三个数字填在 3×3 的方格中, 使得横格与竖格没有重复的数字, 有多少种不同的填法 _____ .
- (2) 甲、乙、丙、丁四名同学和1名老师站成一排合影留念, 老师站在中间, 甲同学不和老师站在一起的不同站法种数为().
- A. 120种 B. 24种 C. 16种 D. 12种
- (3) 如图, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为().



- A. 24 B. 18 C. 12 D. 9

- (4) 有两条平行线, 第一条直线上取4个点, 第二条直线上取6个点, 以其中3个点为顶点作三角形, 一共可以作出 _____ 个.

【答案】(1) 12

(2) D

(3) B

(4) 96

【解析】(1) 略 .

(2) 略 .

(3) $E \rightarrow F$ 有 6 种走法 , $F \rightarrow G$ 有 3 种走法 , 由乘法原理知 , 共 $6 \times 3 = 18$ 种走法 .

(4) 在第一条直线上取两点 : $C_4^2 \cdot C_6^1 + C_6^2 \cdot C_4^1 = 96$.

【标注】【知识点】计数原理综合

5. 某公共汽车上有 10 位乘客 , 沿途 5 个车站 , 乘客下车的可能方式有 () 种 .

A. 5^{10}

B. 10^5

C. 50

D. A_{10}^5

【答案】 A

【解析】 根据题意 , 公共汽车沿途 5 个车站 , 则每个乘客有 5 种下车方式 , 则 10 位乘客共有 5^{10} 种下车的可能方式 .

故选 A .

【标注】【知识点】分步乘法计数原理

6. 8 名学生站成两排 , 前排 5 人 , 后排 3 人 , 则不同的站法种数为 () .

A. $A_8^5 A_3^3$

B. $A_8^5 + A_3^3$

C. $A_5^5 + A_3^3$

D. $\frac{1}{2} A_8^8$

【答案】 A

【解析】 先从 8 名学生中选出 5 人排在前排 , 有 A_8^5 种可能 ,
将剩余 3 人排在后排 , 有 A_3^3 种可能 ,
故不同的排法种数为 $A_8^5 A_3^3$.

故选 A .

【标注】【素养】逻辑推理 ; 数学运算

【知识点】特殊位置优先法 ; 分步乘法计数原理

二、排列与组合

1、排列与组合的概念

名称	定义	
排列	从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素	按照一定的顺序排成一行
组合		合成一组

2、排列数与组合数

(1)排列数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用 A_n^m 表示。

(2)组合数的定义：从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用 C_n^m 表示。

3、排列数、组合数的公式及性质

公式	$(1) A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ $(2) C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{\frac{m!}{(n-m)!m!}} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
性质	$(1) 0! = 1; A_n^n = n!$ $(2) C_n^m = C_n^{n-m}; C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

1. 排列问题

优先法（特殊元素、特殊位置）

如果某些元素或位置特殊，则优先安排特殊元素或特殊位置。

多元问题分类法：将符合条件的排列分为几类，而每一类的排列数较易求出，然后根据分类加法计数原理求出排列总数。

7. 某台小型晚会由6个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位，节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位。该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 _____ 种

【答案】 42

【解析】 分两类：(1) 若甲排在第一位，则有 $A_4^4 = 24$ 种排法

(2) 若甲排在第二位，则有 $3A_3^3 = 18$ 种排法

【标注】【知识点】特殊元素优先法

8. 某班周一的课程表要排入语文、数学、英语、物理、化学、体育六门课程，如果第一节不排体育，第六节不排数学，共有 _____ 种不同的排法。

【答案】 504

【解析】 $A_5^5 + A_4^1 A_4^1 A_4^4 = 504$.

故答案为：504种。

【标注】【知识点】排除法

9. 一生产过程有4道工序，每道工序需要安排一人照看。现从甲、乙、丙等6名工人中安排4人分别照看一道工序，第一道工序只能从甲、乙两工人中安排1人，第四道工序只能从甲、丙两工人中安排1人，则不同的安排方案共有（ ）。

A. 24种

B. 36种

C. 48种

D. 72种

【答案】 B

【解析】 分为三类，

第一类安排甲丙分别做第1第4道工序，则其余4人中安排2人做第2第3道工序有 A_4^2 种方案。

第二类安排乙甲分别做第1第4道工序，则其余4人中安排2人做第2第3道工序有 A_4^2 种方案。

第三类安排乙丙分别做第1第4道工序，则其余4人中安排2人做第2第3道工序有 A_4^2 种方案。

由分类计数原理可得不同的安排方案有 $A_4^2 + A_4^2 + A_4^2 = 36$.

故选B。

【标注】【知识点】特殊位置优先法



捆绑法（相邻问题）

- (1) 模型：将 n 个不同元素排成一排，其中某 k 个元素相邻。

(2) 思路：将相邻的 k 个元素“捆绑”在一起看成一个整体，此时变为 $n - k + 1$ 个元素的全排列，排法为 A_{n-k+1}^{n-k+1} ；再将“捆绑”在一起的元素内部排列，排法为 A_k^k 。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} \cdot A_k^k$ 种。

10. 在学校的一次演讲比赛中，高一、高二、高三分别有1名、2名、3名同学获奖，将这六名同学排成一排合影，要求同年级的同学相邻，那么不同的排法共有（ ）。

- A. 6种 B. 36种 C. 72种 D. 120种

【答案】 C

【解析】 由题意得： $A_2^2 A_3^3 A_3^3 = 72$ 。

故选C。

【标注】 【知识点】捆绑法

11. 《红海行动》中，中国海军“蛟龙突击队”奉命执行一系列任务A、B、C、D、E、F，对任务顺序提出以下要求：重点任务A必须排在前两位，且任务E、F必须排在一起，则这六项任务的不同安排方案共有（ ）。

- A. 84种 B. 42种 C. 112种 D. 64种

【答案】 A

【解析】 重点任务A排在前两位，分两种情况：

①A排在第一位，对E、F捆绑， $A_4^4 A_2^2$ ；

②A排在第二位，从除了A、E、F3个任务中挑选一个排在第一位，对E、F捆绑，

$C_3^1 A_3^3 A_2^2$ ，共 $A_4^4 A_2^2 + C_3^1 A_3^3 A_2^2 = 84$ 种。

【标注】 【知识点】特殊元素优先法；加法原理与乘法原理的综合运用

12. 甲、乙、丙三人在3天节日中值班，每人值班1天，则甲紧接着排在乙后面值班的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 分析：三个全排有 $A_3^3 = 6$ 种，甲乙捆绑后再与丙排有 $A_2^2 = 2$ 种，故所求概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ；

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】 古典概型的概率计算（涉及计数原理）

插空法（相间问题）

(1) 模型：将 n 个不同的元素排成一排，其中某 k 个元素互不相邻（ $k \leq n - k + 1$ ）。

(2) 思路：

①将没有要求的 $n - k$ 个元素全排列，排列方法有 A_{n-k}^{n-k} 种；

②将要求互不相邻的 k 个元素插入 $n - k + 1$ 个空隙中，相当于从 $n - k + 1$ 个空隙中选取 k 个分配给互不相邻的那 k 个元素，其排列方法有 A_{n-k+1}^k 种。根据分步乘法计数原理，符合条件的排法种数有 $A_{n-k}^{n-k} \cdot A_{n-k+1}^k$ 种。

13. 6把椅子摆成一排，3人随机就座，任何两人不相邻的坐法种数为（ ）。

A. 144

B. 120

C. 72

D. 24

【答案】D

【解析】先把三把椅子隔开摆好，它们之间和两端有4个位置，再把三人带椅子插放在四个位置，共有 $A_4^3 = 24$ 种放法，故选D。

【标注】【知识点】插空法

【素养】逻辑推理；数学运算

14. 某班级举行元旦晚会，共有6个不同的节目，其中2个唱歌节目，2个舞蹈节目和2个其他节目，现要求节目单中两个唱歌节目必须排在一起，而两个舞蹈节目不能排在一起，则不同的排法共有（ ）。

A. 10种

B. 15种

C. 72种

D. 144种

【答案】D

【解析】 $A_2^2 A_3^3 A_4^2 = 144$ 。故选D。

【标注】【知识点】捆绑法

15. 在班级活动中，4名男生和3名女生站成一排表演节目。试回答。（写出必要的数学式，结果用数字作答）

(1) 三名女生不能相邻，有多少种不同的站法？

(2) 4名男生相邻有多少种不同的排法？

(3) 女生甲不能站在左端，女生乙不能站在右端，有多少种不同的排法？

(4) 甲乙丙三人按高低从左到右有多少种不同的排法？（甲乙丙三位同学身高互不相等）。

【答案】 (1) 1440 .

(2) 576 .

(3) 3720 .

(4) 840 .

【解析】 (1) $A_4^4 \times A_5^3 = 24 \times 60 = 1440$.

(2) $A_4^4 \times A_4^4 = 24 \times 24 = 576$.

(3) 女生甲在右端, 共 $A_6^6 = 720$ 种排法,

女生甲不在右端, 共 $5 \times 5 \times A_5^5 = 3000$ 种排法,

则共有 3720 种排法 .

(4) 甲、乙、丙满足要求的站法占总站法的 $\frac{1}{6}$, 共有 $A_7^7 \times \frac{1}{6} = 840$ 种 .

【标注】【知识点】捆绑法; 插空法; 倍缩法; 特殊元素优先法

间接法 (正难则反)

对于给定附加条件的问题, 正面考虑情况较为复杂时, 可以考察否定附加条件下问题的情况, 然后从无附加条件中排除上述情况即可 .

16. 从 5 名学生中任选 4 名分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛, 且每科竞赛只有 1 人参加, 若甲不参加生物竞赛, 则不同的选择方案共有 _____ 种 .

【答案】 96

【解析】 由采取补集思想解决:

从 5 名学生中任选 4 名分别参加四科竞赛,

且每科竞赛只有 1 人参加, 共有 $A_5^4 = 120$ 种;

其中甲参加生物竞赛有 $A_4^3 = 24$ 种;

共有 $120 - 24 = 96$ 种 .

【标注】【知识点】排除法

17. 若 A、B、C、D、E 五位同学站成一排照相, 则 A、B 两位同学至少有一人站在两端的概率是 () .
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$

【答案】 D

【解析】 A、B任选一人站两端共： $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^4 = 96$ 种，

其中A、B都在两端的有 $A_2^2 A_3^3 = 12$ 种。

$$\therefore P = \frac{96 - 12}{A_5^5} = \frac{7}{10}$$

$$(\text{或}) P = 1 - \frac{A_3^2 A_3^3}{A_5^5} = \frac{7}{10}.$$

【标注】 【知识点】 古典概型；组合

18. 某次联欢会要安排3个歌舞类节目，2个小品类节目和1个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是 _____。

【答案】 120

【解析】 分为2步：

1. 3个歌舞类节目全排列，有 $A_3^3 = 6$ 种情况，排好后，有4个空位。

2. 3个歌舞类节目不能相邻，则中间2个空位必须安排节目。

分情况讨论：

① 中间2个空位1个安排小品类节目，1个安排相声类节目，有 $C_2^1 A_2^2 = 4$ 种情况；

排好后，剩下的小品有2个位置，有 C_2^1 两种情况，

此时同类不相邻的排法有 $6 \times 4 \times 2 = 48$ 种。

② 中间2个空位全部安排小品类节目，有 $A_2^2 = 2$ 种情况。

排好后，有6个空位，相声类节目排法有 $C_6^1 = 6$ 种。

此时同类节目不相邻的排法种数为 $6 \times 2 \times 6 = 72$ 种。

综上，一共有 $48 + 72 = 120$ 种。

【标注】 【思想】 分类讨论思想

【知识点】 插空法

【素养】 数学运算

除序法

19. 由3个小品和4个跳舞节目组成的文艺晚会，三个小品的顺序固定，则一共有多少种不同的排法？

【答案】 840

【解析】 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = 840$

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】倍缩法

20. 书架上原来摆放着6本不同的书，现要再放3本不同的书，则不同放法的种数为（ ）.

- A. A_7^3
- B. A_4^4
- C. $9 \times 8 \times 7$
- D. $2A_3^3$

【答案】 C

【解析】3本书逐本放在书架上，第1本可放在原来6本书之间和两端的7个位置之一处，有7种放法。

第1本书放入后，书架上有7本书，所以第2本书有8种放法。

同样，第3本书有9种放法，所以放法总数为 $9 \times 8 \times 7$ ，故选C。

【标注】 **【知识点】** 分步乘法计数原理

21. A 、 B 、 C 、 D 、 E 五人站成一排，如果 A 必须站在 B 的左边（ A 、 B 可以不相邻），则不同的排法有（ ）。

- A. 24种 B. 60种 C. 90种 D. 120种

【答案】 B

【解析】（消序问题）5个人全排列有 $5! = 120$ （种），

A在B左边和A在B右边的情形一样多，

所以不同排法有 $\frac{1}{2} \times 120 = 60$ (种) .

【标注】 【知识点】 倍缩法

 全错位

(1) 模型：将编号为 $1 \sim n$ 的 n 个小球放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，规定 i 号小球不许放入 i 号盒子，求不同的放法种数，此种排列称为全错位排列，相应的排列数称为全错位排列数。

(2) 当 $n = 2, 3, 4, 5$ 时的全错位排列数各为 $1, 2, 9, 44$. 关于 $5, 6, 7$ 个元素的错位排列的计算, 可以用剔除法转化为 2 个、 3 个、 4 个元素的错位排列的问题.

22. 同寝室4人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送来的贺卡，则四张贺年卡不同的分配方式有 _____ .

【答案】 9

【解析】 此题可以看成是将数字1, 2, 3, 4填入标号为1, 2, 3, 4的四个方格里，每个格子填一个数字并且每个方格的标号与所填数不同的填法问题，所以先将1填入2至4号的3个方格里有3种方法，第二步把被填入方格的对应数字，填入其他3个方格，又有3种填法，第三步，将剩下的2个数字填入剩下的2个格子中，只有一种填法，故共有9种方法．

【标注】【知识点】错位法

2. 组合问题

优先法（特殊先行）

23. 在某班进行的演讲比赛中，共有5位选手参加，其中3位女生，2位男生．如果2位男生不能连着出场，且女生甲不能排在第一个，那么出场顺序的排法种数为 _____ .

【答案】 60

【解析】 ①若第一个出场的是男生，则第二个出场的是女生，以后的顺序任意排，方法有 $C_2^1 C_3^1 A_3^3 = 36$ 种；②若第一个出场的是女生（不是女生甲），则将剩余的2个女生排列好，2个男生插空，方法有 $C_2^1 C_2^2 A_3^2 = 24$ 种，故所有的出场顺序的排法共有 $36 + 24 = 60$ 种．

【标注】【知识点】特殊元素优先法

24. 某台小型晚会由6个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须排在前两位、节目乙不能排在第一位，节目丙必须排在最后一位，该台晚会节目演出顺序的编排方案共有（ ）．
- A. 36种 B. 42种 C. 48种 D. 54种

【答案】 B

【解析】 方法一：由题意知甲的位置影响乙的排列，

∴要分两类：一类为甲排在第一位共有 $A_4^4 = 24$ 种，

另一类甲排在第二位共有 $A_3^1 A_3^3 = 18$ 种，

∴故编排方案共有 $24 + 18 = 42$ 种．

方法二：第一类：节目甲排在首位时，其他除丙的四个节目排在除最后一个位置的四个不同位置，共有 A_4^4 种不同的排法；

第二类：节目甲排在第二位时，节目乙只能排在第三、四及五三个不同位置之一，然后除甲、乙、丙之外的其他3个节目排在相应其他三个不同位置，共有 $C_3^1 A_3^3$ 种不同的排法，所以 $A_4^4 + C_3^1 A_3^3 = 42$ 种．

方法三：由题可知，可以考虑分成两类计算，

若甲排在第一位，则有 A_4^4 种方案；

若甲排在第二位，则有 $C_3^1 A_3^3$ 种方案；

所以按照要求该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 $A_4^4 + C_3^1 A_3^3 = 42$ （种），

故选B．

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】特殊元素优先法

25. 六张卡片上分别写有数字0, 1, 3, 4, 5, 从中任取四张排成一排，则可以组成不同的四位奇数的个数是 _____．（用数字作答）

【答案】 144

【解析】 当所取四位数字不含0时，不同的四位奇数的个数为 $C_3^1 A_4^3 = 72$ ，

当所取四位数含0时，

不同的四位奇数的个数为 $C_3^1 C_2^1 A_4^2 = 72$ ，

∴共有144个．

【标注】【知识点】特殊元素优先法；加法原理与乘法原理的综合运用

26. 从0, 2, 4, 6, 8中任取2个数字，从1, 3, 5, 7中任取2个数字，组成没有重复的四位数，其中能被5整除的四位数共有 _____ 个（用数字作答）．

【答案】 300

【解析】 ①四位数中包含5和0：

$$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot (A_3^3 + A_2^1 \cdot A_2^2) = 120.$$

②四位数中包含5，不含0.

$$C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot A_3^3 = 108.$$

③四位数中包含0，不含5.

$$C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot A_3^3 = 72.$$

$$\therefore 120 + 108 + 72 = 300.$$

【标注】【知识点】计数原理综合

27. 有12名划船运动员，其中3人只会划左舷，4人只会划右舷，其余5人既会划左舷也会划右舷. 从这12名运动员中选出6人平均分在左、右舷划船参加比赛，有多少种不同的选法？

【答案】2174.

【解析】方法一： $C_3^3 \cdot C_9^3 + C_3^2 \cdot C_5^1 \cdot C_8^3 + C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^3 + C_3^0 \cdot C_5^3 \cdot C_6^3$
 $= 1 \times \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} + 3 \times 5 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} + 3 \times 10 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + 1 \times 10 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$
 $= 84 + 840 + 1050 + 200 = 2174$ (种).

答：一共有2174种不同选法.

方法二：按照有多少个多面手划左舷进行分类：

①有0个多面手划左舷的方法数为 $C_3^3 \cdot C_9^3 = 84$ ；

②有1个多面手划左舷的方法数为： $C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_8^3 = 840$ ；

③有2个多面手划左舷的方法数为： $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_7^3 = 1050$ ；

④有3个多面手划左舷的方法数为： $C_5^3 \cdot C_6^3 = 200$.

于是所有的方法数为 $84 + 840 + 1050 + 200 = 2174$.

【标注】【知识点】组合

隔板法

n 个相同元素，分成 $m(m \leq n)$ 组，每组至少一个的分组问题——把 n 个元素排成一行，从 $n-1$ 个空中选 $m-1$ 个空，各插一个隔板，有 C_{n-1}^{m-1} 种方法.

此法用于相同元素，不同去处，至少一个的问题.

28. 设有编号为1, 2, 3, 4, 5的五个球和编号为1, 2, 3, 4, 5的五个盒子，现将这五个球放入5个盒子内.

(1) 只有一个盒子空着，共有多少种投放方法？

(2) 没有一个盒子空着，但球的编号与盒子编号不全相同，有多少种投放方法？

(3) 每个盒子内放一球，且至少有两个球的编号与盒子编号是相同的，有多少种投放方法？

【答案】 (1) 1200 .

(2) 119 .

(3) 31 .

【解析】 (1) 方法一： $C_5^2 A_5^4 = 1200$ ；选出两个球，归为一组；从五个盒子中选出四个盒子，把这四组球放入 .

方法二：首先选定两个不同的球，看作一个球，选法有 $C_5^2 = 10$ 种，再把“空”当作一个球，共计5个“球”，投入5个盒子中，有 $A_5^5 = 120$ 种投放法 .
 $\therefore$ 共计 $10 \times 120 = 1200$ 种方法 .

(2) 方法一： $A_5^5 - 1 = 119$.

方法二：没有一个盒子空着，相当于5个元素排列在5个位置上，有 A_5^5 种，而球的编号与盒子编号全相同只有1种，所以没有一个盒子空着，但球的编号与盒子编号不全相同的投法有 $A_5^5 - 1 = 119$ 种 .

(3) 方法一：分球的编号与盒子编号有2, 3, 5个相同讨论，

$$C_5^2 \times 2 + C_5^3 \times 1 + 1 = 20 + 10 + 1 = 31 .$$

方法二：不满足条件的情形：第一类，恰有一球相同的放法： $C_5^1 \times 9 = 45$ ，

$$\text{第二类，五个球的编号与盒子编号全不同的放法：} 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$$

$\therefore$ 满足条件的放法数为：

$$A_5^5 - 45 - 44 = 31 \text{ (种)} .$$

【标注】【知识点】排列组合综合；排除法

29. 要将5个小球放入3个盒子中：

(1) 若小球完全相同，盒子不同，每个盒子中都必须放入小球，有多少种不同的放入方法？

(2) 若球完全相同，盒子不同，任意放入，有多少种不同的放入方法？

【答案】 (1) 6种 .

(2) 21种 .

【解析】 (1) 采用隔板法，有 $C_4^2 = 6$ 种方法 .

(2) 注意条任意放入，即可以有盒子中无球，可以先在每个盒子中各添加1球，问题转化为8个小球放入3个盒子中，每个盒子至少一个小球的不同放入方法，同样采取

隔板法，此时有 $C_7^2 = 21$ 种方法。

【标注】【知识点】排列

30. 将20个相同的球全部放入编号为1, 2, 3的盒子里，使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号，则不同的放球方法共有 _____ 种。（用数字作答）

【答案】120

【解析】根据题意，先在20个球中取出1个球放到编号为2的盒子里，再取出2个球放在编号为3的盒子里，此时只需将剩下的17个球，分为3组，每组至少一个，分别放到三个盒子里即可；将17个球排成一列，排好后，有16个空位，在16个空位中任取2个，插入挡板，有 $C_{16}^2 = 120$ 种方法，即有120种将17个球分为3组的方法，将分好的3组对应3个盒子，即可满足盒内的球数不小于盒号数，则盒内的球数不小于盒号数的放入方法有120种，故答案为：120。

【标注】【知识点】隔板法

31. 某校准备组建一个由12人组成篮球队，这12个人由8个班的学生组成，每班至少一人，名额分配方案共 _____ 种。

【答案】330

【解析】此例的实质是12个名额分配给8个班，每班至少一个名额，可在12个名额中的11个空档中插入7块挡板，一种插法对应一种名额的分配方式，故有 $C_{11}^7 = 330$ 种。

【标注】【知识点】隔板法

32. 将7个相同的小球投入甲、乙、丙、丁4个不同的小盒中，每个小盒中至少有1个小球，那么甲盒中恰好有3个小球的概率为（ ）。

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】 7个相同的小球，投入甲、乙、丙、丁4个不同的小盒中，每个小盒中至少有1个小球的放法有 $C_6^3 = 20$ ，其中甲盒中恰有3个小球的放法有 $C_3^2 = 3$ ，
 $\therefore$ 所求概率为 $\frac{3}{20}$ 。
 故选C。

【标注】 【知识点】古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

间接法

33. 从装有3双不同鞋的柜子里，随机取2只，则取出的2只鞋不成对的概率为（ ）。

- A. $\frac{14}{15}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】 B

【解析】 从装有3双不同鞋的柜子里，随机取2只，
 基本事件总数 $n = C_6^2 = 15$ ，
 取出的2只鞋不成对包含的基本事件 $m = C_6^2 - C_3^1 = 12$ ，
 则取出的2只鞋不成对的概率为 $P = \frac{m}{n} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。
 故选B。

【标注】 【知识点】古典概型的概率计算（涉及计数原理）；简单的组合问题

【素养】 数学运算

34. 某学校开设A类选修课3门，B类选修课4门，一位同学从中共选3门，若要求两类课程各至少选一门，则不同的选法共有（ ）。

- A. 30种 B. 31种 C. 35种 D. 60种

【答案】 A

【解析】 $C_7^3 - C_3^3 - C_4^3 = 30$ 。
 故选A。

【标注】 【知识点】分组分配法

【素养】 逻辑推理

35. 从4个男生，3个女生中挑选4人参加智力竞赛，要求至少有一个女生参加的选法共有（ ）。

- A. 12种 B. 34种 C. 35种 D. 36种

【答案】 B

【解析】 采用间接法，总选法为 $C_7^4 = C_7^3 = 35$ ，无女生的选法为 $C_4^4 = 1$ ，故答案为34.

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 分组分配法

36. 从5名男生、4名女生中选3名学生组成一个学习小组，要求其中男、女生都有，则不同的组队方案共有（ ）.

A. 70种

B. 80种

C. 100种

D. 140种

【答案】 A

【解析】 方法一：按照3名学生中男生（女生）的个数去讨论：

3名学生中有一名男生，对应的组队方案有 $C_5^1 C_4^2 = 30$ ；3名学生中有两名男生，对应的组队方案有 $C_5^2 C_4^1 = 40$. 故总计70种.

方法二：利用间接法，不同的组队方案种数为 $C_9^3 - C_5^3 - C_4^3 = 70$.

【标注】 【知识点】 简单的组合问题

37. 从装有3个白球和2个黑球的袋子中任取3个球，则所取的3个球中至少有1个黑球的概率是（ ）.

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{9}{10}$

【答案】 D

【解析】 随机取3个球，共有 $C_5^3 = 10$ 种，

取出3个白球的概率为 $\frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$ ，

则至少1个黑球的概率为 $1 - \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{9}{10}$.

故选D.

【标注】 【知识点】 对立事件的概率和为1；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

分组分配法

分堆问题的特点是堆与堆之间的区别仅仅是元素个数，而不强调元素本身，因此若出现了若干组元素个数相同的情况，在采取分步乘法计数原理处理问题之后还需要做除序处理.

(1) 不均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆，每堆元素数目均不相等，求其分法种数．

【实例】10本书分成2, 3, 5三堆，其分法种数为 $C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^5 = 2520$ ．

(2) 均匀分堆

【模型】 n 个不同元素分成 m 堆，每堆元素数目都相等，求其分法种数．

【实例】9本书分成3, 3, 3三堆，其分法种数为 $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{A_3^3} = 280$ ．

(3) 部分均匀分组

【模型】 n 个不同元素分成 m 组，恰有 r 堆元素数目都相等，求其分法种数．

【实例】10本书分成2, 4, 4三堆，其分法种数为 $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{A_2^2} = 1575$ ．

38. 有6本不同的书

(1) 甲、乙、丙3人每人2本，有多少种不同的分法？

(2) 分成3堆，每堆2本，有多少种不同的分堆方法？

(3) 分成3堆，一堆1本，一堆2本，一堆3本，有多少种不同的分堆方法？

(4) 分给甲、乙、丙3人，一人1本，一人2本，一人3本，有多少不同的分配方法？

(5) 分给甲1本、乙1本、丙4本，有多少种不同的分配方法？

(6) 分成3堆，有2堆各一本，另一堆4本，有多少种不同的分堆方法？

(7) 摆在3层书架上，每层2本，有多少种不同的摆法？

(8) 假设6本书相同，分给甲、乙、丙三人，每人至少一本，则有多少种不同的分法？

【答案】见解析．

【解析】(1) 在6本书中，先取2本给甲，再从剩下的4本书中取2本给乙，最后2本给丙，共有 $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$ (种)．这是均匀编号分组问题

(2) 6本书平均分成3堆，用(1)中方法重复了 A_3^3 倍，故共有 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{A_3^3} = 15$ (种)．

这是均匀分组问题．

(3) 从6本书中，先取1本做1堆，再在剩下的5本中取2本做一堆，最后3本做一堆，共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 60$ (种)．这是非均匀分组问题

(4) 在(3)的分堆中，甲、乙、丙3人任取一堆，故共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot A_3^3 = 360$ (种)．

这是非均匀编号分组问题．

(5) 甲先取1本，乙在剩下的取1本，余下4本给丙，故共有 $C_6^1 C_5^1 = 30$ (种)．这是部分均匀编号分组问题．

(6) 平均分堆要除以堆数的全排列数, 不平均分堆则不除, 故共有 $\frac{C_6^1 \cdot C_5^1}{A_2^2} = 15$

(种) .

这是部分均匀分组问题 .

(7) 本题即为6本书放在6个位置上, 共有 $A_6^6 = 720$ (种) .

(8) 此为挡板问题, 结果为 $C_5^2 = 10$ (种) .

【标注】【知识点】分组分配法

39. 现有5名教师要带3个兴趣小组外出学习考察, 要求每个兴趣小组的带队教师至多2人, 则不同的带队方案有 _____ 种. (用数字作答)

【答案】 90

【解析】 将5名教师分成3组, 每组至少2人, 则有 $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$ 种方法, 将3组老师分配到3个兴趣小组有 $15 A_3^3 = 90$.

【标注】【素养】数学抽象; 数学运算; 逻辑推理

【知识点】 分组分配法

40. 某城市有3个演习点同时进行消防演习, 现将5个消防队分配到这3个演习点, 若每个演习点至少安排1个消防队, 则不同的分配方案种数为 () .

A. 150

B. 240

C. 360

D. 540

【答案】 A

【解析】 根据题意, 5个消防队分配到这3个演习点, 若每个演习点至少安排1个消防队, 则可将5队分为3、1、1的三组, 有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 10$ 种分组方法, 将分好的3组对应3个演习点,

有 $A_3^3 = 6$ 种方法,

共有 $10 \times 6 = 60$ 种分配方案;

将5队分为2、2、1的三组, 有 $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$ 种分组方法, 将分好的3组对应3个演习点, 有

$A_3^3 = 6$ 种方法,

共有 $15 \times 6 = 90$ 种分配方案;

故共有 $60 + 90 = 150$ 种分配方案.

故选A.

【标注】【知识点】分类加法计数原理；分组分配法

41. 北京《财富》全球论坛期间，某高校有14名志愿者参加接待工作．若每天排早、中、晚三班，每班4人，每人每天最多值一班，则开幕式当天不同的排班种数为（ ）．

- A. $C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4$
B. $C_{14}^{12}A_{12}^4A_8^4$
C. $\frac{C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4}{A_3^3}$
D. $C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4A_3^3$

【答案】A

【解析】先从14人中选12人，有 C_{14}^{12} 种选法，
早班从12人中选取4人，有 C_{12}^4 种选法，
中班从剩余的8人中选4人，有 C_8^4 种选法，
剩余的4人是晚班．
∴开幕式当天不同的排班种数为 $C_{14}^{12}C_{12}^4C_8^4$ ．
故选A．

【标注】【知识点】分组分配法

【素养】逻辑推理

42. 将甲、乙等5位同学分别保送到北京大学、上海交通大学、中山大学这3所学校就读，则每所大学至少保送1人的不同保送方法种数为（ ）．

- A. 150 B. 180 C. 240 D. 540

【答案】A

【解析】5名学生分成2, 2, 1或3, 1, 1两种形式，
当5名学生分成2, 2, 1时，共有 $\frac{1}{2}C_5^2C_3^2A_3^3 = 90$ 种；
当5名学生分成3, 1, 1时，共有 $C_5^3A_3^3 = 60$ 种．
根据分类加法计数原理，共有 $90 + 60 = 150$ 种．
故不同的保送的方法种数为150．

【标注】【知识点】分组分配法

三、综合应用

43. 将标号为1, 2, ..., 10的10个球放入标号为1, 2, ..., 10的10个盒子里, 每个盒内放一个球, 恰好3个球的标号与其在盒子的标号不一致的放入方法种数为().

A. 120

B. 240

C. 360

D. 720

【答案】 B

【解析】 根据题意, 先确定标号与其在盒子的标号不一致的3个球,

即从10个球中取出3个, 有 $C_{10}^3 = 120$ 种,

而这3个球的排法有 $2 \times 1 \times 1 = 2$ 种;

则共有 $120 \times 2 = 240$ 种,

故选: B.

【标注】 【知识点】分步乘法计数原理

【素养】数学运算

44. 用0, 1, 2, 3, 4, 5, 6这七个数字:

(1) 能组成多少个无重复数字的四位奇数.

(2) 能组成多少个无重复数字且为5的倍数的五位数.

(3) 能组成多少个无重复数字且比31560大的五位数.

【答案】 (1) 300.

(2) 660.

(3) 1334.

【解析】 (1) 根据题意, 分3步进行分析: ①个位从1, 3, 5中选择一个, 有 C_3^1 种选法;

②千位上不可选0, 从剩下的5个数中选一个, 有 C_5^1 种选法;

③在剩下的5个数字中选出2个, 安排在百位、十位上, 有 A_5^2 种选法.

则有 $C_3^1 \times C_5^1 \times A_5^2 = 300$ (个) 无重复数字的四位奇数.

(2) 分2种情况讨论:

①个位上的数字是0, 在其余的6个数字中任选4个, 安排在前4个数位, 有 A_6^4 种情况, 则此时的五位数有 A_6^4 个;

②个位上的数字是5, 万位上不可选0, 从剩下的5个数字中选一个, 有 C_5^1 种选法, 在余下的5个数字中选出3个, 安排在中间3个数位, 有 $C_5^1 \times A_5^3$ 种情况, 则此时符

合条件的五位数有 $C_5^1 \times A_5^3$ (个) .

故满足条件的五位数共有 $A_6^4 + C_5^1 \times A_5^3 = 660$ (个) .

(3) 符合要求的比31560大的五位数可分为四类 :

第一类 : 形如4□□□□, 5□□□□, 6□□□□, 有 $C_3^1 \times A_6^4$ (个) ;

第二类 : 形如32□□□, 34□□□, 35□□□, 36□□□, 有 $C_4^1 \times A_5^3$ (个) ;

第三类 : 形如316□□, 有 A_4^2 (个) ;

第四类 : 形如3156□, 有2个 .

由分类加法计数原理知, 所求五位数有 $C_3^1 \times A_6^4 + C_4^1 \times A_5^3 + A_4^2 + 2 = 1334$

(个) .

【标注】【知识点】排列组合综合 ; 数字问题

45. 某班班会, 准备从包括甲、乙两人的七名同学中选派4名学生发言, 要求甲、乙两人中至少有1人参加, 则甲、乙都被选中且发言时不相邻的概率为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 $\frac{A_5^2 A_3^2}{A_7^4 - A_5^4} = \frac{120}{940 - 120} = \frac{1}{6}$.

【标注】【素养】数学运算 ; 逻辑推理

【知识点】 古典概型的概率计算 (涉及计数原理) ; 插空法

46. 将3本相同的小说, 2本相同的诗集全部分给4名同学, 每名同学至少1本, 则不同的分法有 () .
- A. 24种 B. 28种 C. 32种 D. 36种

【答案】 B

【解析】 方法一 : 由题五本书分给四名同学, 每名同学至少1本, 那么这四名同学中有且仅有一名同学分到两本书, 第一步骤, 先选出一名同学, 即 : C_4^1 ;

这名同学分到的两本书有三种情况 : 两本小说, 两本诗集或是一本小说和一本诗集, 因为小说、诗集都不区别, 所以在第一情况下有 C_3^1 种分法 (剩下三名同学中选一名同学分到一本小说, 其余两名同学各分到一本诗集) ,

在第二情况下有1种分法 (剩下三名同学各分到一本小说) ,

在第三情况下有 C_3^1 种分法 (剩下三名同学中选一名同学分到一本诗集, 其余两名同学各分到一本小说) ,

这样第二步骤共有情况数是 $C_3^1 + 1 + C_3^1 = 7$,

故本题的答案是 $7C_4^1 = 28$.

故选B .

方法二：将3本相同的小说记为 a, a, a ; 2本相同的诗集记为 b, b ,

将问题分成3种情况 ,

分别是1、 aa, a, b, b , 此种情况有 $A_4^2 = 12$ 种 ;

2、 bb, a, a, a , 此种情况有 $C_4^1 = 4$ 种 ;

3、 Ab, a, a, b , 此种情况有 $A_4^2 = 12$ 种 , 总共有28种 .

故选B .

【标注】【知识点】分组分配法

47. 从6男2女共8名学生中选出队长1人 , 副队长1人 , 普通队员2人组成4人服务队 , 要求服务队中至少有1名女生 , 共有 _____ 种不同的选法 . (用数字作答)

【答案】 660

【解析】 方法一：由题意可得：总的选择方法为 $C_8^4 \times C_4^1 \times C_3^1$ 种方法 , 其中不满足题意的选法有 $C_6^4 \times C_4^1 \times C_3^1$ 种方法 , 则满足题意的选法有： $C_8^4 \times C_4^1 \times C_3^1 - C_6^4 \times C_4^1 \times C_3^1 = 660$ 种 .

方法二：依题意 , 按照女生的人数分类 .

第一类 , 含1女3男 , 有 $C_6^3 C_2^1 = 40$ (种) ,

从这4人中选2人作为队长和副队长有 $C_4^1 \times C_3^1 = 12$ (种) , 故有 $40 \times 12 = 480$ (种) ;

第二类 , 含2女2男 , 有 $C_6^2 C_2^2 = 15$ (种) ,

从这4中选2人作为队长和副队长有 $C_4^1 \times C_3^1 = 12$ (种) , 故有 $15 \times 12 = 180$ (种) .

根据分类加法计数原理共有 $480 + 180 = 660$ 种 .

【标注】【知识点】组合 ; 排除法

48. 从4名男同学中选出2人 , 6名女同学中选出3人 , 并将选出的5人排成一排 , 选出的3名女同学必须从左至右 , 从高到矮排列 , 共有 _____ 种不同的排法 .

【答案】 2400

【解析】 从4名男同学中选出2人 , 有 C_4^2 种选法 ,

从6名女同学中先选出3人 , 有 C_6^3 种选法 ,

因为女同学要从左到右 , 从高到矮排列 ,

所以3名女同学的相对顺序固定，
 所以采用除序法，有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}$ 种排法，
 $\therefore$ 共有 $C_4^2 C_6^3 \cdot \frac{A_5^5}{A_3^3} = 2400$ 种排法。
 故答案为：2400。

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算
【知识点】倍缩法

49. 将甲、乙、丙、丁四名同学分到三个不同的班，每个班至少分到一名同学，且甲、乙两名同学不能分到一个班，则不同分法的种数为（ ）。

- A. 18 B. 24 C. 30 D. 36

【答案】 C

【解析】 方法一：如丙、丁分到同一个班级，则方法数就是三个元素的一个全排列，即 A_3^3 ；若丙分到甲或乙所在的班级，则丁只能独自一个班级，方法数是 $2A_3^3$ ；同理，若丁分到甲或乙所在的班级，则丙独自一个班级，方法数是 $2A_3^3$ 。根据分类加法计数原理，得总的方法数是 $5A_3^3 = 30$ 。

方法二：总的方法数是 $C_4^2 A_3^3 = 36$ ，甲、乙被分到同一个班级的方法数是 $A_3^3 = 6$ ，故甲、乙不分到同一个班级的方法数是 $36 - 6 = 30$ 。

【标注】【知识点】排列

50. 用数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有 _____ 个。（用数字作答）

【答案】 1080

【解析】 根据题意，分2种情况讨论：

①四位数中没有偶数数字，即在1, 3, 5, 7, 9中任选4个，组成四位数即可，有 $A_5^4 = 120$ 种情况，即有120个没有偶数数字的四位数；

②四位数中只有一个偶数数字，

在1, 3, 5, 7, 9中选出3个，在2, 4, 6, 8中选出1个，有 $C_5^3 \cdot C_4^1 = 40$ 种取法，

将取出的4个数字全排列，有 $A_4^4 = 24$ 种顺序，

则有 $40 \times 24 = 960$ 个只有一个偶数数字的四位数；

则至多有一个数字是偶数的四位数有 $120 + 960 = 1080$ 个 .

【标注】【知识点】特殊元素优先法；加法原理与乘法原理的综合运用