

03圆锥曲线性质综合

1. 圆锥曲线性质综合

【备注】此部分可以给学生补充点差法以及相应结论.

1. 2020年陕西西安雁塔区西安市第八十五中学高三三模理科第14题5分 ★★★

已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N , 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】6

【解析】设 $N(0, a)$, 已知 $F(2, 0)$, 那么 $M(1, \frac{a}{2})$, 又点 M 在抛物线上, 所以

$$\frac{a^2}{4} = 8 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{2}, \text{ 所以 } N(0, \pm 4\sqrt{2}), \text{ 那么}$$
$$|FN| = \sqrt{(2-0)^2 + (0 \pm 4\sqrt{2})^2} = 6.$$

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系; 中点弦问题

2. 2017~2018学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末理科第10题3分 ★★★

已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是抛物线上的两个动点, 若满足

$y_1 + y_2 + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|$, 则 $\angle AFB$ 的最大值是 ().

A. $\frac{\pi}{3}$

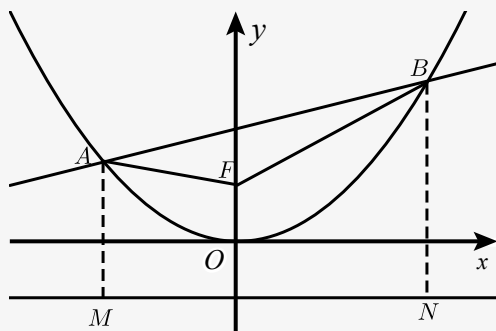
B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】



$$\therefore y_1 + y_2 + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|,$$

$$|AF| + |BF| = y_1 + y_2 + 2,$$

$$\therefore |AF| + |BF| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|,$$

在 $\triangle AFB$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{aligned}
\cos \angle AFB &= \frac{|AF|^2 + |BF|^2 - |AB|^2}{2|AF||BF|} \\
&= \frac{(|AF| + |BF|)^2 - 2|AF||BF| - |AB|^2}{2|AF||BF|} \\
&= \frac{\frac{4}{3}|AB|^2 - |AB|^2}{2|AF||BF|} - 1 \\
&= \frac{\frac{1}{3}|AB|^2}{2|AF||BF|} - 1, \\
\text{又 } |AF| + |BF| &= \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB| \geq 2\sqrt{|AF| \cdot |BF|}, \\
\text{当且仅当 } |AF| &= |BF| \text{ 时等号成立,} \\
\therefore |AF| \cdot |BF| &\leq \frac{1}{3}|AB|^2, \\
\therefore \cos \angle AFB &\geq \frac{\frac{1}{3}|AB|^2}{2 \times \frac{1}{3}|AB|^2} - 1 = -\frac{1}{2}, \\
\therefore \angle AFB \text{ 的最大值为 } &\frac{2\pi}{3}. \\
\text{故选 B.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和抛物线的位置关系

3. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期末特长班第15题 ★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，椭圆 E 与 y 轴正半轴的交点为 B ，直线 BF 与椭圆的另一个交点为 A ，若 $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FA}$ ，则椭圆的离心率为 _____。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 由已知得， $OB = b$ ， $OF = c$ ，

$\therefore F(-c, 0)$ ， $B(b, 0)$ ，设 $A(x_0, y_0)$ ，

$\therefore \overrightarrow{BF} = (-c, -b)$ ， $\overrightarrow{FA} = (x_0 + c, y_0)$ ，

则 $\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{3}c \\ y_0 = -\frac{b}{3} \end{cases}$ 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，

$\therefore \frac{\left(-\frac{4}{3}c\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{b}{3}\right)^2}{b^2} = 1$ ，又有 $e = \frac{c}{a}$ ，

$\therefore e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；平面向量的数乘运算及运算规则

4. 2019~2020学年浙江杭州滨江区浙江省杭州第二中学高二上学期期末第6题4分 ★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$ ，过点 F 的直线交椭圆于 A 、 B 两点。若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$ ，则 E 的方程为 ()。

A. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

C. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$

D. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

【答案】 D**【解析】** 方法一：由题意知，直线 AB 的斜率存在且不为 0，

故设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 3) (k \neq 0)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 。由 $\begin{cases} y = k(x - 3) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 消去 y ，得 $(a^2k^2 + b^2)x^2 - 6a^2k^2x + 9a^2k^2 - a^2b^2 = 0$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{6a^2k^2}{a^2k^2 + b^2} = 2$ ，①

$$y_1 + y_2 = k(x_1 - 3) + k(x_2 - 3) = \frac{6a^2k^2}{a^2k^2 + b^2} - 6k = -2. \quad ②$$

$$\text{由①得 } 2a^2k^2 = b^2, \quad ③$$

$$\text{由②得 } 2a^2k^2 = 6kb^2 - 2b^2 \quad ④$$

由③④得 $6kb^2 - 2b^2 = b^2$ ，解得 $k = \frac{1}{2}$ 。将 $k = \frac{1}{2}$ 代入③，得 $a^2 = 2b^2$ ，结合

$$a^2 - b^2 = c^2 = 9, \text{ 解得 } a^2 = 18, b^2 = 9. \text{ 故 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

方法二：

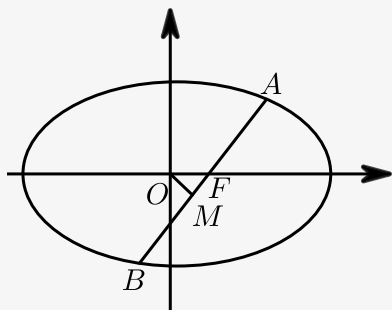
$$\text{由题意知 } k_{AB} = \frac{0 - (-1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

两式相减可得 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$ ，由 AB 的中点是 $(1, -1)$ 知

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = -2 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

联立 $a^2 - b^2 = 9$ ，解得 $a^2 = 18, b^2 = 9$ ，故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

方法三：



由中点弦可知 $k_{MF} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ ，

$$k_{MF} = \frac{1}{2}, k_{OM} = -1,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \because a^2 - b^2 = c^2 = 9,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 9 = 2b^2,$$

$$\Rightarrow a^2 = 18, b^2 = 9.$$

故选 D。

【标注】 【知识点】 椭圆的标准方程

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，过右焦点 F 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 方法一： $\because e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore a^2 = \frac{4}{3}c^2,$$

$$\therefore b^2 = \frac{1}{3}c^2,$$

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{4}{3}c^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}c^2} = 1,$$

设直线方程为 $my = x - c$ ，

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{4}{3}c^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}c^2} = 1 \\ my = x - c \end{cases} \Rightarrow (3m^2 + 12)y^2 + 6mcy - c^2 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-6mc}{3m^2 + 12}, \quad y_1 y_2 = \frac{-c^2}{3m^2 + 12},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB},$$

$$\therefore y_1 = -3y_2,$$

$$\therefore \begin{cases} -2y_2 = \frac{-6mc}{3m^2 + 12} \\ -3y_2^2 = \frac{-c^2}{3m^2 + 12} \end{cases},$$

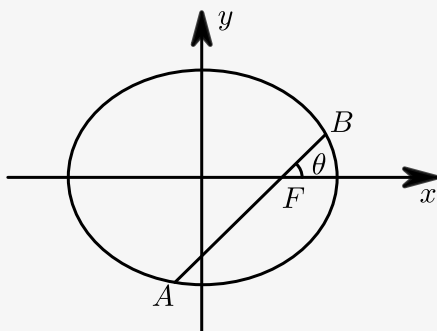
$$\therefore m^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore k^2 = 2,$$

$$\therefore k > 0,$$

$$\therefore k = \sqrt{2}.$$

方法二：如图：



设直线的倾斜角为 θ ，因为 $k > 0$ ，可知 B 在 x 轴上方；

$$\text{所以有 } |BF| = \frac{b^2}{a + c \cos \theta}, \quad |AF| = \frac{b^2}{a + c \cos(\theta + \pi)} = \frac{b^2}{a - c \cos \theta},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}, \text{ 于是有 } \frac{b^2}{a - c \cos \theta} = \frac{3b^2}{a + c \cos \theta}, \text{ 化简得 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2 \cos \theta},$$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以有 } \frac{1}{2 \cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k = \tan \theta = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】椭圆的离心率；直线和椭圆的位置关系；共线比例问题；坐标表示平面向量的

6. 2020~2021学年12月天津南开区南开大学附属中学高二上学期月考第14题5分 ★★★

顶点在原点，焦点在 x 轴上的抛物线，截直线 $2x - y + 1 = 0$ 所得的弦长为 $\sqrt{15}$ ，则抛物线方程为 _____ .

【答案】 $y^2 = 12x$ 或 $y^2 = -4x$

【解析】 设所求抛物线方程为 $y^2 = ax$ ($a \neq 0$) ,

已知直线变形为 $y = 2x + 1$,

设抛物线截直线所得的弦长为 $|AB|$, 联立 $\begin{cases} y^2 = ax \\ y = 2x + 1 \end{cases}$,

消去 y , 得 $(2x + 1)^2 = ax$,

整理得 $4x^2 + (4 - a)x + 1 = 0$,

由 $\Delta > 0$, 得 $a > 8$ 或 $a < 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{a - 4}{4}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}$.

$|AB| = \sqrt{(1 + 2^2) \left[\left(\frac{a - 4}{4} \right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \right]} = \sqrt{15}$,

解得 $a = 12$ 或 $a = -4$,

故所求抛物线方程为 $y^2 = 12x$ 或 $y^2 = -4x$.

【标注】 【知识点】 弦长求解问题；直线和抛物线的位置关系

7. 2019~2020学年广东惠州高三上学期期末理科第11题5分 ★★★

已知 F 为抛物线 $y^2 = x$ 的焦点，点 A , B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ (其中 O 为坐标原点) , 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 () .

A. 2

B. 3

C. $\frac{17\sqrt{2}}{8}$

D. $\sqrt{10}$

【答案】 B

【解析】 如图，设直线 AB 的方程为： $x = ty + m$,

点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

直线 AB 与 x 轴的交点为 $M(m, 0)$,

由 $\begin{cases} x = ty + m \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow y^2 - ty - m = 0$,

根据韦达定理有 $y_1 \cdot y_2 = -m$,

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$,

$\therefore x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 2$,

结合 $y_1^2 = x_1$ 及 $y_2^2 = x_2$,

$$\text{得 } (y_1 \cdot y_2)^2 + y_1 \cdot y_2 - 2 = 0,$$

$\therefore$ 点 A, B 位于 x 轴的两侧,

$$\therefore y_1 \cdot y_2 = -2, \text{ 故 } m = 2.$$

不妨令点 A 在 x 轴上方, 则 $y_1 > 0$,

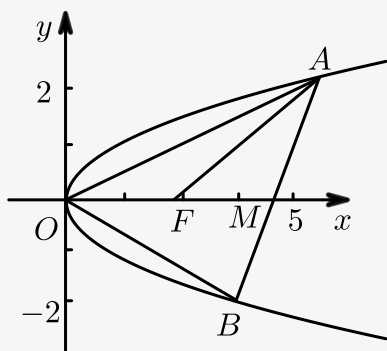
$$\text{又 } F\left(\frac{1}{4}, 0\right),$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AFO} = \frac{1}{2} \times 2 \times (y_1 - y_2) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} y_1$$

$$= \frac{9}{8} y_1 + \frac{2}{y_1} \geq 2\sqrt{\frac{9}{8} y_1 \cdot \frac{2}{y_1}} = 3.$$

当且仅当 $\frac{9}{8} y_1 = \frac{2}{y_1}$, 即 $y_1 = \frac{4}{3}$ 时, 取“=”号,

$\therefore \triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 3, 故选 B.



【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系

8. 2017年江西九江高三三模文科第11题5分 ★★★

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P 是抛物线 E 上位于第一象限内的任意一点, Q 是线段 PF 上的点, 且满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$, 则直线 OQ 的斜率的最大值为 ().

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 由抛物线 $E: y^2 = 2px$ 焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 设 $P\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $y_1 > 0$, $Q(x, y)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}, \text{ 则 } x, y = \frac{2}{3}\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}, 0\right),$$

$$\begin{cases} x = \frac{y_1^2}{3p} + \frac{p}{6} \\ y = \frac{2}{3}y_1 \end{cases},$$

$$\text{则直线 } OQ \text{ 的斜率 } k, \text{ 则 } \frac{1}{k} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{y_1^2}{3p} + \frac{p}{6}}{\frac{2}{3}y_1} = \frac{2y_1^2 + p^2}{4y_1p} \geq \frac{2\sqrt{2}y_1p}{4y_1p} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当 $\sqrt{2}y_1 = p$, 取等号,

$$k \leq \sqrt{2},$$

∴ 直线 OQ 的斜率的最大值 $\sqrt{2}$,

故选 D.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；直线和抛物线的位置关系；向量问题

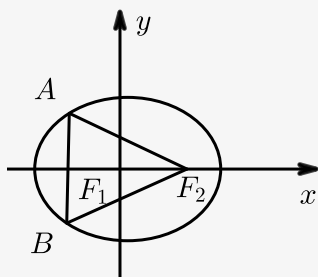
9. 2019~2020学年12月高三上学期月考文科第9题5分 ★★★

已知点 F_1 、 F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线与椭圆交于 A 、 B 两点，若 $\triangle ABF_2$ 为正三角形，则椭圆的离心率是 () .

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 3 D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】 D

【解析】 如图，



$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0),$$

$$\text{将 } x = -c \text{ 代入 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 得 } y = \pm \frac{b^2}{a}, \text{ 则 } AF_1 = \frac{b^2}{a},$$

因为 $\triangle ABF_2$ 为正三角形，

$$\text{所以 } |F_1F_2| = \sqrt{3}|AF_1|, \text{ 即 } 2c = \frac{\sqrt{3}b^2}{a}, \text{ 即 } 2ac = \sqrt{3}b^2, \text{ 又 } b^2 = a^2 - c^2,$$

$$\text{则 } 2ac = \sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}c^2, \text{ 即 } \sqrt{3}c^2 + 2ac - \sqrt{3}a^2 = 0,$$

$$\text{两边同时除以 } a^2 \text{ 可得 } \sqrt{3}e^2 + 2e - \sqrt{3} = 0,$$

$$\text{解得 } e = -\sqrt{3} \text{ 或 } e = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为 $0 < e < 1$,

$$\text{所以 } e = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故选 D.

【标注】【知识点】求椭圆的离心率

10. 2018年天津南开区高三一模文科第12题5分 ★★★

设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过 F 斜率为 k ($k > 0$) 的直线与抛物线交于 A 、 B 两点，若 $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$ ，则 k 的值为 _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 由 $y^2 = 4x$, 得 $F(1, 0)$,

设 AB 所在直线方程为 $y = k(x - 1)$,

联立 $y^2 = 4x$, 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

若 $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$, 则 $|AF| = 2|BF|$,

解方程得 :

$$x_1 = \frac{k^2 + 2}{k^2} + \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} , \quad x_2 = \frac{k^2 + 2}{k^2} - \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} ,$$

$$\therefore x_1 + 1 = 2(x_2 + 1) \text{ 即 } x_1 = 2x_2 + 1 ,$$

$$\therefore \frac{k^2 + 2}{k^2} + \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} = 2 \times \frac{k^2 + 2}{k^2} - 2 \times \frac{2\sqrt{k^2 + 1}}{k^2} + 1 ,$$

解得 : $k = \sqrt{2}$, $k = -\sqrt{2}$ (舍去) .

故答案为 : $\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 直线和抛物线的位置关系 ; 定值问题 (证明、探究)

11. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第7题5分 ★★★

若过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内一点 $P(3, 1)$ 的弦被该点平分 , 则该弦所在的直线方程为 () .

- A. $3x + 4y - 13 = 0$ B. $3x - 4y - 5 = 0$ C. $4x + 3y - 15 = 0$ D. $4x - 3y - 9 = 0$

【答案】 A

【解析】 设弦的两端点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 P 为 AB 的中点得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$,

$$\text{由 } A, B \text{ 在椭圆上得 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \\ \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1 \end{cases} , \text{ 两式相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{16} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{16} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3(x_1 - x_2)}{8} + \frac{y_1 - y_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{4} ,$$

则 $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, 又该弦所在的直线过点 $P(3, 1)$, 则有 $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$,

整理得 $3x + 4y - 13 = 0$.

故选 A .

【标注】 【知识点】 中点弦问题 ; 直线和椭圆的位置关系

12. 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期末第10题4分 ★★★

设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ，过焦点的直线分别交抛物线于 A ， B 两点，分别过 A ， B 作 l 的垂线，垂足为 C ， D ，若 $|AF| = 3|BF|$ ，且三角形 CDF 的面积为 $\sqrt{3}$ ，则 p 的值为 () .

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

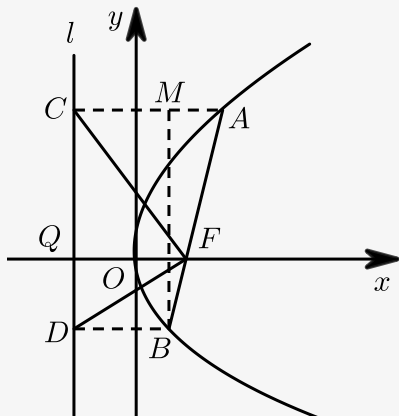
C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【答案】 C

【解析】 过点 B 作 $BM \parallel l$ ，交直线 AC 于点 M ，交 x 轴于点 N ，

如图所示，



设点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

由 $|AF| = 3|BF|$ ，得 $x_1 + \frac{p}{2} = 3\left(x_2 + \frac{p}{2}\right)$ ，

即 $x_1 - 3x_2 = 9$ ，①

又 $|QF| = |QN| + |NF|$

$$= |BD| + \frac{1}{4}|AM|$$

$$= x_2 + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)$$

$$= p,$$

$\therefore x_1 + 3x_2 = 4p$ ，②

由①②解得 $x_1 = \frac{5}{2}p$ ， $x_2 = \frac{1}{2}p$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，

$$|AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{5}{2}p + \frac{1}{2}p + p$$

$$= 4p,$$

$$|AM| = x_1 - x_2$$

$$= \frac{5}{2}p - \frac{1}{2}p$$

$$= 2p,$$

$$\therefore |BM| = \sqrt{(4p)^2 - (2p)^2} = 2\sqrt{3}p,$$

$$\therefore \triangle CDF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}p \cdot p = \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } p = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故选 C .

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；抛物线的定义；面积问题；焦点弦问题

13. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期末第10题4分 ★★★

过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 交于 C, D 两点, 若有三条直线满足 $|AC| = |BD|$, 则 r 的取值范围为 ().

- A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $(2, +\infty)$ C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

【答案】B

【解析】方法一：①当直线 $l \perp x$ 轴时, 直线 $l: x = 1$ 与抛物线交于点 $(1, 2), (1, -2)$

, 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 交于点 $(1, r), (1, -r)$, 满足 $|AC| = |BD|$;

②当直线 l 不与 x 轴垂直时, 设直线 $l: y = k(x-1), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 化简得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2},$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 2 = 4 + \frac{4}{k^2},$$

$\therefore$ 当四点顺序为 A, C, D, B 时, $|AC| = |BD|$,

$\therefore AB$ 中点为 $F(1, 0)$, 这样的直线不存在,

当四点顺序为 A, C, B, D 时,

$\therefore |AC| = |BD|, \therefore |AB| = |CD|$,

又 $\therefore |CD| = 2r$,

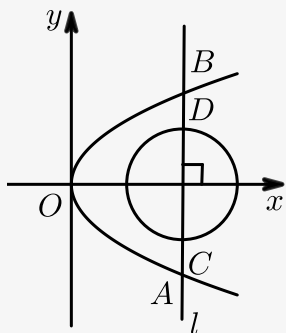
$$\therefore 4 + \frac{4}{k^2} = 2r, \text{ 即 } \frac{2}{k^2} = r - 2,$$

当 $r > 2$ 时存在互为相反数的两斜率 k , 即存在关于 $x = 1$ 对称的两条直线,

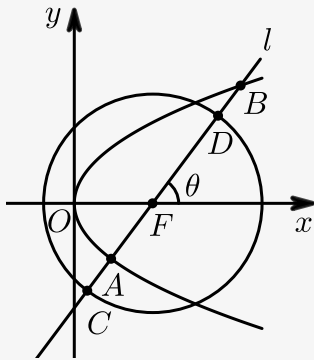
综上, 当 $r \in (2, +\infty)$ 时有 3 条满足条件的直线.

故选 B.

方法二:



对于任意 l , 均有一条斜率不存在的 l , 故而有两条斜率存在的 l .



$$|AC| = |BD| ,$$

$$|AC| + |AD| = |BD| + |AD| ,$$

$$2r = |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} ,$$

$$r = \frac{2}{\sin^2 \theta} > 2 .$$

故选 B .

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和抛物线的位置关系；直线与圆的位置关系

14. 2019~2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高二上学期月考第15题4分 ★★★

已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的动点，则 P 点到直线 $l: x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 的距离的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】 由 P 为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上任一点，不妨设 $P(x_0, y_0)$ ，

$$\text{有 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 ,$$

$$\text{而由柯西不等式有 } \left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 \right) (4 + 1) \geq (x_0 + y_0)^2 ,$$

$$\text{即 } (x_0 + y_0)^2 \leq 5 , |x_0 + y_0| \leq \sqrt{5} ,$$

设点 P 到直线 $x + y - 2\sqrt{5} = 0$ 距离为 d ，

$$d = \frac{|x_0 + y_0 - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} - (x_0 + y_0)}{\sqrt{2}} \geq \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} ,$$

$$\text{于是 } d_{\min} = \frac{\sqrt{10}}{2} .$$

【标注】【知识点】设点法

15. 2020年天津和平区高三二模第14题5分 ★★★

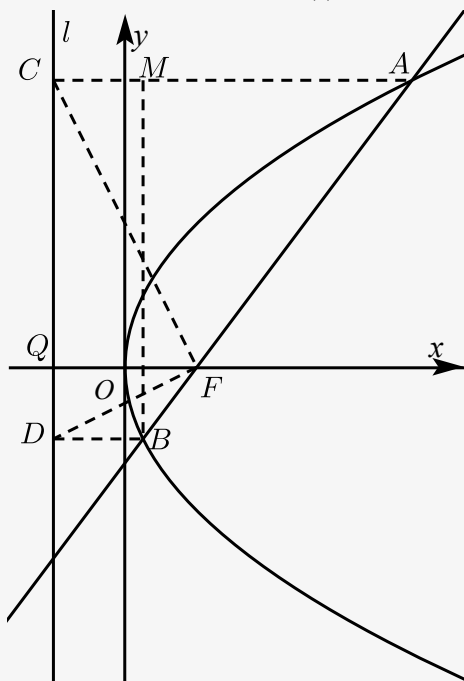
设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线为 l ，过焦点的直线交抛物线于 A, B 两点，分别过 A, B 作 l 的垂线，垂足为 C, D ，若 $|AF| = 4|BF|$ ，则 $p =$ _____，三角形 CDF 的面积为 _____ .

【答案】 2；5

【解析】方法一：抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F(1, 0)$ ，

所以 $\frac{p}{2} = 1$ ，所以 $p = 2$ ，

如图所示，过点 B 作 $BM \parallel l$ ，交直线 AC 与点 M ，



由抛物线的定义知 $|AF| = |AC|$ ， $|BF| = |BD| = CM$ ，

且 $|AF| = 4|BF|$ ，

所以 $|AM| = 3|BF|$ ， $|AB| = 5|BF|$ ，由勾股定理得 $|BM| = 4|BF|$ ，

所以直线 AB 的斜率为 $k = \tan \angle BAM = \frac{4}{3}$ ，

设直线 AB 的方程为 $y = \frac{4}{3}(x - 1)$ ，

点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4}{3}(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

消去 y 整理得 $4x^2 - 17x + 4 = 0$ ，

所以 $x_1 + x_2 = \frac{17}{4}$ ，

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{25}{4}$ ，

所以 $|CD| = |AB| \sin \angle BAM = \frac{25}{4} \times \frac{4}{5} = 5$ ，

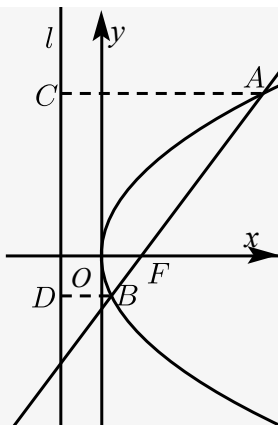
所以 $\triangle CDF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$ ，

故答案为：2，5.

方法二： $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，

$\therefore p = 2$ ，即抛物线方程为 $y^2 = 4x$ ，

$\therefore$ 准线 l 为 $x = -1$ ，



又 $\because$ 设过焦点的直线为 $x = my + 1$ 并交抛物线于 A, B ,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

$$\text{又}\because \text{设 } A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), (\text{设 } y_1 > 0, y_2 < 0),$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4m, \quad ①$$

$$y_1 y_2 = -4, \quad ②$$

$$\text{又}\because |AF| = 4|BF|,$$

$$\therefore \text{由抛物线性质可得 } |AC| = 4|BD|,$$

$$\text{且 } |y_1| = |4y_2| \Rightarrow y_1 = -4y_2,$$

$$\therefore 1 + \frac{y_1^2}{4} = 4\left(1 + \frac{y_2^2}{4}\right),$$

$$\text{解得 } y_1^2 = 4y_2^2 + 12, \quad ③$$

$$\text{对①式两边平方得: } (y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 = 16m^2,$$

$$\text{解得 } y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8,$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} = 4\sqrt{m^2 + 1},$$

$$\text{又}\because \text{联立} \begin{cases} y_1^2 = 4y_2^2 + 12 \\ y_1^2 + y_2^2 = 16m^2 + 8 \\ y_1 = -4y_2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{9}{16},$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = 4\sqrt{m^2 + 1} = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}CD \times P = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2| = 5.$$

【标注】【知识点】面积问题；抛物线的基本量求解

16. 2020~2021学年天津河东区高二上学期期中第9题2分 ★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过点 $\left(0, \frac{5}{8}\right)$ 的直线交椭圆 C 所得的弦的中点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则该椭圆的离心率为 ().

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】 B

【解析】 设弦为 AB , AB 中点 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

由点差法知 ,

$$k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2} ,$$

$$k_{AB} \cdot 1 = -\frac{b^2}{a^2} ,$$

$$\therefore AB : y - \frac{5}{8} = -\frac{b^2}{a^2}x ,$$

又 $\because M$ 在直线 AB 上 ,

$$\therefore \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore -\frac{1}{8} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4} ,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

故选 B .

【标注】 【知识点】 求椭圆的离心率

17. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末第8题3分 ★★★

在平面直角坐标系 xOy 中 , 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右支与焦点为 F 的抛物线

$x^2 = 2py (p > 0)$ 交于 A, B 两点 , 若 $|AF| + |BF| = 4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为 () .

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

【答案】 D

【解析】 把 $x^2 = 2py (p > 0)$ 代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

$$\text{可得 : } a^2 y^2 - 2pb^2 y + a^2 b^2 = 0 ,$$

$$\therefore y_A + y_B = \frac{2pb^2}{a^2} ,$$

$$\therefore |AF| + |BF| = 4|OF| ,$$

$$\therefore y_A + y_B + 2 \times \frac{p}{2} = 4 \times \frac{p}{2} ,$$

$$\therefore \frac{2pb^2}{a^2} = p ,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore \text{该双曲线的渐近线方程为 : } y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x .$$

故选 D .

【标注】【知识点】求双曲线的渐近线；抛物线与双曲线结合

18. 2018~2019学年广东广州天河区广州市第一一三中学高二上学期期中第12题5分 ★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 及点 $B(0, a)$, 过点 B 与椭圆相切的直线交 x 轴的负半轴于点 A , F 为椭圆的右焦点, 则 $\angle ABF =$ () .

A. 60°

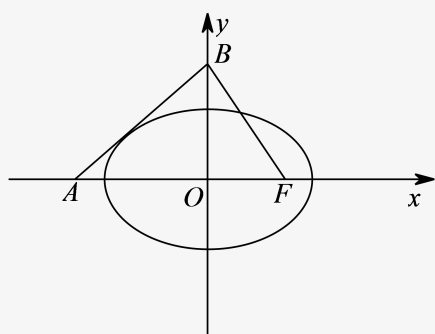
B. 90°

C. 120°

D. 150°

【答案】B

【解析】如图：



设过 B 的直线方程为： $y = kx + a$,

联立 $\begin{cases} y = kx + a \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得：

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^3kx + a^4 - a^2b^2 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 4a^6k^2 - 4(a^2k^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2) = 0,$$

$$\text{得：} k = \pm \frac{c}{a},$$

取 $k = \frac{c}{a}$, 则直线方程为：

$$y = \frac{c}{a}x + a,$$

$$y = 0 \text{ 时, } x = -\frac{a^2}{c},$$

$$\text{则 } A\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right),$$

在 $\triangle ABF$ 中,

$$AB^2 = a^2 + \frac{a^4}{c^2} = \frac{a^2c^2 + a^4}{c^2},$$

$$BF^2 = a^2 + c^2,$$

$$AF^2 = \left(c + \frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{c^4 + 2a^2c^2 + a^4}{c^2},$$

$$\therefore \cos \angle ABF = \frac{AB^2 + BF^2 - AF^2}{2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\frac{a^2c^2 + a^4}{c^2} + a^2 + c^2 - \frac{c^4 + 2a^2c^2 + a^4}{c^2}}{\frac{2a^3 + 2ac^2}{c}} = 0,$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ.$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系

19. 2015~2016学年天津高二上学期期末理科六校联考第12题5分 ★★★

若点 $(3, 1)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 的一条弦的中点，且这条弦所在直线的斜率为 2，则 $p =$ _____ .

【答案】 2

【解析】 过点 $(3, 1)$ 且斜率为 2 的直线方程为 $y = 2x - 5$,

代入抛物线 $y^2 = 2px$, 可得 $(2x - 5)^2 = 2px$, 即 $4x^2 - (20 + 2p)x + 25 = 0$,

$$\therefore \frac{20 + 2p}{4} = 6 ,$$

$$\therefore p = 2 ,$$

故答案为：2 .

【标注】【知识点】直线和抛物线的位置关系；中点弦问题

20. 2017~2018学年10月天津河东区天津市第五十四中学高二上学期月考理科第6题3分 ★★★

F_1 、 F_2 为双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 () .

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

【答案】 B

【解析】 由双曲线方程 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 可得焦点在 y 轴上，

$$a = 1 , b = 2 , c = \sqrt{5} ,$$

$$\text{则 } F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5} , PF_1 - PF_2 = 2a = 2 ,$$

$$\text{由 } \angle F_1PF_2 = 90^\circ , \text{ 得 } F_1F_2^2 = PF_1^2 + PF_2^2 ,$$

$$\text{解得 } PF_1 = 4, PF_2 = 2 , \text{ 则 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} \cdot PF_1 \cdot PF_2 = 4 ,$$

故选 B .

【标注】【知识点】双曲线的标准方程；面积问题

21. 2019~2020学年天津高二上学期期中六校联考第11题5分 ★★★

斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A 、 B 两点， AB 的中点 $M\left(m, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $m =$ _____ .

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】 $\because$ 直线斜率为 $\frac{1}{2}$,

设直线 AB 为: $y = \frac{1}{2}x + b$,

联立直线 AB 与椭圆方程,

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 则 } \frac{x^2}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}x + b\right)^2}{3} = 1,$$

$$3x^2 + 4\left(\frac{1}{2}x + b\right)^2 = 12,$$

$$4x^2 + 4bx + 4b^2 - 12 = 0,$$

设 A 的坐标 (x_A, y_A) , B 的坐标 (x_B, y_B) ,

由韦达定理可得: $x_A + x_B = -\frac{4b}{4} = -b$,

$$\text{则 } y_A + y_B = \frac{1}{2}x_A + b + \frac{1}{2}x_B$$

$$= \frac{1}{2}(x_A + x_B) + 2b$$

$$= \frac{3}{2}b,$$

又 AB 的中点 $M\left(m, \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3}{4}b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\text{故 } m = -\frac{1}{3}.$$

故答案为: $-\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；中点弦问题