

02直线与圆锥曲线的位置关系2习题

1. 定值定点问题

1. 2019~2020学年4月天津静海区静海区第一中学高三下学期月考第18题15分 ★★★

已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.

(3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 存在, $\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}$, $\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1$, $a^2 = b^2 + c^2$,

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 设 $D(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 、 AD 的斜率分别为: k_{AB} 、 k_{AD} ,

$$\therefore k_{AD} + k_{AB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 1}$$

$$= 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2} \right] (*),$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = -8b^2 + 64 > 0,$$

$$\therefore \Rightarrow -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b \text{ ①}, x_1 x_2 = \frac{b^2 - 4}{4} \text{ ②},$$

$$\text{将①、②式代入} (*) \text{式整理得 } 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 1} \right] = 0,$$

$$\text{即 } k_{AD} + k_{AB} = 0.$$

$$(3) \because |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4}$$

$$= \sqrt{3} \frac{\sqrt{64 - 8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8 - b^2},$$

$$\text{设 } d \text{ 为点 } A \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离, } \therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8 - b^2)b^2} \leq \sqrt{2},$$

当且仅当 $b = \pm 2$ 时取等号,

$$\text{又} \because \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{当 } b = \pm 2 \text{ 时, } S_{\triangle ABD_{\max}} = \sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；面积问题；最值问题

2. 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟（3月）第19题 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, \sqrt{2})$ 且满足 $a + b = 3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 C 交于两个不同的点 A, B , 点 M 坐标为 $(2, 1)$, 设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试问 $k_1 + k_2$ 是否为定值? 并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k_1 + k_2$ 为定值 0, 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意可得 $b = \sqrt{2}$,

$$\text{又 } a + b = 3\sqrt{2}, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{2},$$

$$\text{则椭圆的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设直线在 y 轴上的截距为 m ,

$$\therefore \text{直线的方程为 } y = \frac{1}{2}x + m,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases},$$

$$\text{得 } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{当 } \Delta = 4m^2 - 8m^2 + 16 > 0,$$

即 $-2 < m < 2$ 时, 直线与椭圆交于两点,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -2m, \quad x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 4,$$

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}, \quad k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \\ &= \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m, \quad y_2 = \frac{1}{2}x_2 + m,$$

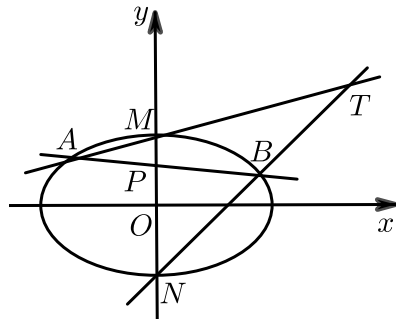
$$\begin{aligned} &\therefore (y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2) \\ &= \left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1\right)(x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1\right)(x_1 - 2) \\ &= x_1 \cdot x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1) \\ &= 2m^2 - 4 + (m - 2)(-2m) - 4(m - 1) = 0. \end{aligned}$$

故 $k_1 + k_2 = 0$.

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；直线和椭圆的位置关系

3. 2019年湖北武汉高三四模理科第19题12分 ★★★★★

如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距等于其长半轴长， M, N 为椭圆 C 的上下顶点，且 $|MN| = 2\sqrt{3}$.



(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过点 $P(0, 1)$ 作直线 l 交椭圆 C 于异于 M, N 的 A, B 两点，直线 AM, BN 交于点 T ，求证：点 T 的纵坐标为定值 3.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由题意知： $2c = a$ ， $2b = 2\sqrt{3}$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，

有 $b = \sqrt{3}$ ， $c = 1$ ， $a = 2$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由题意知直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y = kx + 1$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq 0$ ， $x_2 \neq 0$).

$$\begin{cases} y = kx + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 + 8kx - 8 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8k}{4k^2 + 3}, \quad x_1 x_2 = \frac{-8}{4k^2 + 3}, \quad \text{且有 } x_1 + x_2 = kx_1 x_2,$$

$$\begin{cases} l_{AM}: y = \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1} \cdot x + \sqrt{3} \\ l_{BN}: y = \frac{y_2 + \sqrt{3}}{x_2} \cdot x - \sqrt{3} \end{cases} \quad (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0),$$

$$\begin{aligned} \frac{y - \sqrt{3}}{y + \sqrt{3}} &= \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1} \times \frac{x_2}{y_2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{kx_1 + 1 - \sqrt{3}}{x_1} \times \frac{x_2}{kx_2 + 1 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{kx_1 x_2 + (1 - \sqrt{3})x_2}{kx_1 x_2 + (1 + \sqrt{3})x_1},$$

$$\frac{y - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{kx_1 x_2 + (1 - \sqrt{3})x_2}{(1 + \sqrt{3})x_1 - (1 - \sqrt{3})x_2},$$

$$\text{故 } y = \sqrt{3} \left[\frac{2kx_1 x_2 + 2(1 - \sqrt{3})x_2}{(1 + \sqrt{3})x_1 - (1 - \sqrt{3})x_2} + 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} \times \frac{2kx_1x_2 + (x_1 + x_2) + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{(1 + \sqrt{3})x_1 - (1 - \sqrt{3})x_2} \quad (\because x_1 + x_2 = kx_1x_2) \\
&= \sqrt{3} \times \frac{3(x_1 + x_2) + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{\sqrt{3}(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

故点 T 的纵坐标为定值 3.

【标注】【知识点】定值问题（证明、探究）；椭圆的标准方程；直线和椭圆的位置关系

4. 2017年天津和平区高三二模理科第19题14分 ★★★★★

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{3}{2})$ ，且离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 设椭圆 E 的右顶点为 A ，若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 相交于 M, N 两点（异于 A 点），且满足 $MA \perp NA$ ，试证明直线 l 经过定点，并求出该定点的坐标.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析，定点坐标为 $(\frac{2}{7}, 0)$.

【解析】 (1) 由椭圆离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，则 $a = 2c$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$ ，

将 $(1, \frac{3}{2})$ 代入椭圆方程： $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，解得： $c = 1$ ，则 $a^2 = 4$ ， $b^2 = 3$ ，

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，整理得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 3) = 0$ ，

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{3 + 4k^2}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2}$ ，

且 $\Delta = 64m^2k^2 - 16(3 + 4k^2)(m^2 - 3) > 0$ ，即 $3 + 4k^2 - m^2 > 0$ ，

$\therefore$ 以 MN 为直径的圆过椭圆的右顶点 A ，

$\therefore AM \perp AN$ ，即 $AM \cdot AN = 0$ ，则 $(x_1 - 2, y_1)(x_2 - 2, y_2) = 0$ ，即

$y_1y_2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$ ，

又 $y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2}$ ，

$\therefore \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2} + \frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2} + 2 \times \frac{8mk}{3 + 4k^2} + 4 = 0$ ，

化简得， $7m^2 + 4k^2 + 16mk = 0$ ，

解得 $m = -2k$ 或 $m = -\frac{2k}{7}$ 且均满足 $3 + 4k^2 - m^2 > 0$ ，

当 $m = -2k$ 时， $L: y = k(x - 2)$ ，直线过定点 $(2, 0)$ 与已知矛盾；

当 $m = -\frac{2k}{7}$ 时， $L: y = k(x - \frac{2}{7})$ ，直线过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$ ，

综上, 直线 l 过定点, 定点坐标为 $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$.

【标注】【知识点】定点问题

2. 向量点乘问题问题

5. 2017~2018学年12月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考文科第19题10分 ★★★★★

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点, 若 $\vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} = 8$, 求 k 的值.

【答案】(1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) $k = \pm\sqrt{2}$.

【解析】(1) 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $a = \sqrt{3}c$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x = -c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}b}{3}$, 于是 $\frac{2\sqrt{6}b}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 解得 $b = \sqrt{2}$, 又 $a^2 - c^2 = b^2$, 从而 $a = \sqrt{3}$, $c = 1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 设点 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 由 $F(-1, 0)$ 得直线 CD 的方程为 $y = k(x + 1)$,

由方程组 $\begin{cases} y = k(x + 1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $(2 + 3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0$

求解可得 $x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{2 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{3k^2 - 6}{2 + 3k^2}$, 因为 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$, 所以

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{CB} &= (x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot (\sqrt{3} - x_2, -y_2) + (x_2 + \sqrt{3}, y_2) \cdot (\sqrt{3} - x_1, -y_1) \\ &= 6 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 6 - 2x_1x_2 - 2k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ &= 6 - (2 + 2k^2)x_1x_2 - 2k^2(x_1 + x_2) - 2k^2 \\ &= 6 + \frac{2k^2 + 12}{2 + 3k^2} \end{aligned}$$

由已知得 $6 + \frac{2k^2 + 12}{2 + 3k^2} = 8$, 解得 $k = \pm\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】向量问题; 直线和椭圆的位置关系

6. 2019年天津武清区高三二模理科(宝坻区、蓟州区、宁河区、静海区联考)第19题14分 ★★★★★

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$, 上顶点为 B_1 , 原点 O 到直线 B_1F_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2)

若点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，点 A 为椭圆的右顶点，是否存在过点 A 的直线 l 交椭圆 C 于点 B （异于点 A ），使得 $\overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 存在； $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2)$.

【解析】 (1) 由椭圆的一个焦点为 $F_1(-1, 0)$ ，知： $c = 1$ ，

即 $a^2 - b^2 = 1$ ① .

又因为直线 B_1F_1 的方程为 $bx - y + b = 0$ ，即

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } b = \sqrt{3}.$$

由①解得 $a^2 = 4$.

故所求椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 假设存在过点 A 的直线 l 适合题意，则结合图形易判断知直线 l 的斜率必存在，于是可设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases}, \text{ 得}$$

$$(3 + 4k^2)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0 (*) ,$$

因为点 A 是直线 l 与椭圆 C 的一个交点，且 $x_A = 2$.

$$\text{所以 } x_A \cdot x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 所以 } x_B = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2},$$

$$\text{即点 } B\left(\frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(\frac{16k^2}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right), \text{ 即 } \overrightarrow{OT} = \frac{\sqrt{14}}{7}\left(\frac{16k^2}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right),$$

因为点 T 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，所以

$$\frac{2}{7} \cdot \left[\left(\frac{16k^2}{3 + 4k^2}\right)^2 + \left(-\frac{12k}{3 + 4k^2}\right)^2 \right] = 2, \text{ 化简得 } 48k^4 - 8k^2 - 21 = 0, \text{ 解得}$$

$$k^2 = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

经检验知，此时 $(*)$ 对应的判别式 $\Delta > 0$ ，满足题意。

故存在满足条件的直线 l ，其方程为

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2).$$

【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设椭圆 C 的上顶点为 P , 证明: 当 l 的斜率为 $\frac{1}{3}$ 时, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\triangle AF_1B$ 的周长等于 $|AF_1| + |AB| + |BF_1| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_2| + |BF_1| = 4a$,

$$\therefore 4a = 4\sqrt{2} \text{ 从而 } a = \sqrt{2},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(2) 由 (1) 得 $P(0, 1), F_2(1, 0)$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

依题意得, 直线 l 的方程为 $x = 3y + 1$,

将 l 的方程代入 C 并整理, 可得 $11y^2 + 6y - 1 = 0$,

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6}{11}, y_1 y_2 = -\frac{1}{11},$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 x_2 + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= (3y_1 + 1)(3y_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= 10y_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) + 2 = -\frac{10}{11} - \frac{12}{11} + 2 = 0,$$

$$\therefore PA \perp PB,$$

综上, 点 P 在以 AB 为直径的圆上.

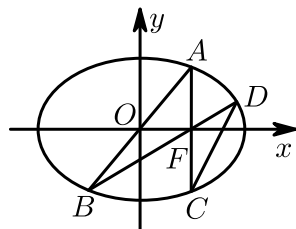
【标注】【知识点】直线和椭圆的位置关系; 椭圆的标准方程; 向量问题

3. 共线比例问题

8. 2018年江苏扬州高三一模第18题15分 ★★★

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(1, \frac{3}{2})$

. F 为椭圆的右焦点, A, B 为椭圆关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.



- (1) 求椭圆的标准方程；
- (2) 若 $AF = FC$ ，求 $\frac{BF}{FD}$ 的值；
- (3) 设直线 AB ， CD 的斜率分别为 k_1 ， k_2 ，是否存在实数 m ，使得 $k_2 = mk_1$ ，若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $\frac{BF}{FD} = \frac{7}{3}$.

(3) 存在 $m = \frac{5}{3}$ ，使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

【解析】 (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，由题意知： $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$ ，

解之得： $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ ，所以椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 若 $AF = FC$ ，由椭圆对称性，知 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ，所以 $B\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ ，

此时直线 BF 方程为 $3x - 4y - 3 = 0$ ，

由 $\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，得 $7x^2 - 6x - 13 = 0$ ，解得 $x = \frac{13}{7}$ ($x = -1$ 舍去)，

故 $\frac{BF}{FD} = \frac{1 - (-1)}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{3}$.

(3) 设 $A(x_0, y_0)$ ，则 $B(-x_0, -y_0)$ ，

直线 AF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ ，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，得

$$(15 - 6x_0)x^2 - 8y_0^2 - 15x_0^2 + 24x_0 = 0,$$

因为 $x = x_0$ 是该方程的一个解，所以 C 点的横坐标 $x_c = \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}$ ，

又 $C(x_c, y_c)$ 在直线 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ 上，所以 $y_c = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x_c - 1) = \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}$ ，

同理， D 点坐标为 $\left(\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0}, \frac{3y_0}{5 + 2x_0}\right)$ ，

所以 $k_2 = \frac{\frac{3y_0}{5+2x_0} - \frac{-3y_0}{5-2x_0}}{\frac{8+5x_0}{5+2x_0} - \frac{8-5x_0}{5-2x_0}} = \frac{5y_0}{3x_0} = \frac{5}{3}k_1$ ，

即存在 $m = \frac{5}{3}$ ，使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

【标注】【知识点】对称问题；设点法