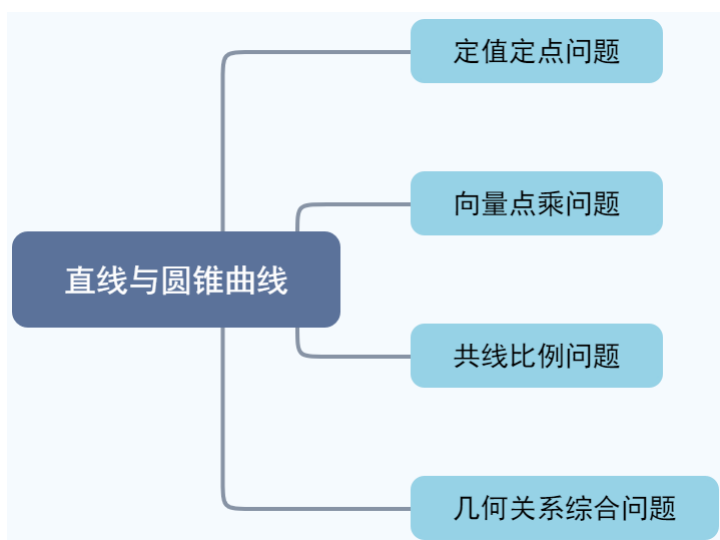


02直线与圆锥曲线的位置关系2



1. 定值定点问题

💡 定点问题

求证 $\times \times \times$ 过定点

解题思路：结合条件，将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，找到 k 和 m 之间的关系，然后求解即可。

探究 $\times \times \times$ 是否过定点（一般在 x 轴上）

解题思路：设动点坐标为 $(m, 0)$ ，然后结合条件，将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，会得到一个含有 m 的代数式，然后求解即可。

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$ ，且经过点 $A(0, 1)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设 O 为原点，直线 $l: y = kx + t (t \neq \pm 1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q ，直线 AP 与 x 轴交于点 M ，直线 AQ 与 x 轴交于点 N ，若 $|OM| \cdot |ON| = 2$ ，求证：直线 l 经过定点。

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设椭圆的左焦点为 F ，若直线 l 与椭圆交于不同两点 A, B (A, B 都在 x 轴上方)，且 $\angle OFA + \angle OFB = 180^\circ$ (O 为坐标原点)。

① 当 A 为椭圆与 y 轴正半轴的交点时，求直线 l 的方程。

②

对于直线 l 是否存在一个定点，无论 $\angle OFA$ 如何变化，直线 l 总经过此定点？若存在，求出该定点的坐标；若不存在，请说明理由。

定值问题

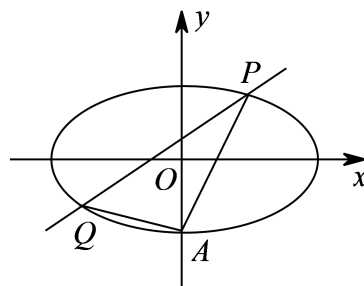
求证 $\times \times \times$ 为定值

解题思路：将需要求证的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，得到的就是我们需要证明的定值。

探究 $\times \times \times$ 是否为定值？

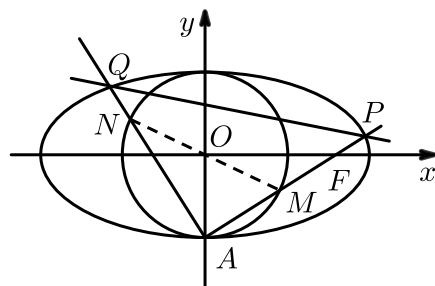
解题思路：将需要探究的 $\times \times \times$ 转化成与 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 有关的关系式，代入 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 后，一般情况下会得到一个含有参数 k 的整式或者分式。若含有参数 k 的代数式为整式，则令 k 的每一项系数都等于 0；若含有参数 k 的代数式为分式，则令含有 k 的分子分母对应的系数之比相等。

3. 如图，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



- (1) 求椭圆 E 的方程。
 - (2) 经过点 $(1, 1)$ ，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P, Q (均异于点 A)，问直线 AP 与 AQ 的斜率之和是否为定值。若是，求出这个定值；若不是，请说明理由。
4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短半轴长为 1，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
- (1) 求 C 的方程。
 - (2) 设 C 的上、下顶点分别为 B, D ，动点 P (横坐标不为 0) 在直线 $y = 2$ 上，直线 PB 交 C 于点 M ，记直线 DM, DP 的斜率分别为 k_1, k_2 ，求 $k_1 \cdot k_2$ 的值。
5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$ ，且左顶点到右焦点的距离为 5。
- (1) 求椭圆方程。
 - (2) 椭圆上有两点 A, B ， O 为坐标原点，且 $AO \perp BO$ ，证明存在定点 M ，使得 M 到直线 AB 的距离为定值，并求出定值。
6. 在平面直角坐标系 xOy 中，设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的下顶点为 A ，右焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。已知点 P 是椭圆上一点，当直线 AP 经过点 F 时，原点 O 到直线 AP 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
- (1) 求椭圆 C 的方程。

- (2) 设直线 AP 与圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 相交于点 M (异于点 A) , 设点 M 关于原点 O 的对称点为 N , 直线 AN 与椭圆相交于点 Q (异于点 A) .



- ① 若 $|AP| = 2|AM|$, 求 $\triangle APQ$ 的面积 .
 - ② 设直线 MN 的斜率为 k_1 , 直线 PQ 的斜率为 k_2 , 求证 : $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值 .
7. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点其焦距为 6 , 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点 , 且 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $12\sqrt{2}$.
- (1) 求 C 的方程 .
 - (2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是 C 上的动点 , 从点 O (O 是坐标系原点) 向圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 6$ 作两条切线 , 分别交 C 于 P, Q 两点 . 已知直线 OP, OQ 的斜率存在 , 并分别记为 k_1, k_2 .
 - ① 求证 : $k_1 k_2$ 为定值 .
 - ② 试问 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 是否为定值 ? 若是 , 求出该值 ; 若不是 , 请说明理由 .

2. 向量点乘问题问题

【解题思路】 向量是平面解析几何中的重要的基本工具 , 向量可以解决长度、夹角、点共线、直线的平行和垂直等条件的代数化 , 有时圆锥曲线中的已知条件也会以向量形式给出 , 这都要求我们能够熟练掌握和使用向量工具 . 例如 , 常见的直线垂直条件 , 如果用斜率之积为 -1 来表达则需要讨论斜率是否存在 , 而用向量的数量积为 0 来表达则不需要讨论 .

8. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 F_1, C 分别是椭圆 M 的左焦点、左顶点 , 过点 F_1 的直线 l (不与 x 轴重合) 交 M 于 A, B 两点 .
- (1) 求 M 的离心率及短轴长 ;
 - (2) 是否存在直线 l , 使得点 B 在以线段 AC 为直径的圆上 , 若存在 , 求出直线 l 的方程 ; 若不存在 , 说明理由 .
9. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆 E 的左、右焦点 , M 为 E 上任意一点 , $S_{\triangle F_1 M F_2}$ 的最大值为 1 , 椭圆右顶点为 A .
- (1) 求椭圆 E 的方程 .
 - (2) 若过 A 的直线 l 交椭圆于另一点 B , 过 B 作 x 轴的垂线交椭圆于 C (C 异于 B 点) , 连接 AC 交 y 轴于点 P . 如果 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}$ 时 , 求直线 l 的方程 .

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A 、 B ，已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$ 。

① 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ ，求直线 l 的倾斜角。

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上，且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$ 。求 y_0 的值。

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。设 P 为圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上任意一点，过点 P 作该圆的切线交椭圆于 E 、 F 两点。

(1) 求椭圆的方程。

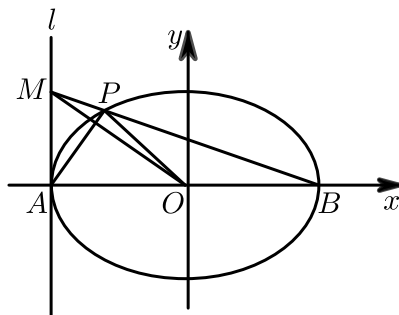
(2) 试判断 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 是否为定值？若为定值，则求出该定值；否则，请说明理由。

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，椭圆 C 上的点到其左焦点的最大距离为 $2 + \sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $A(-a, 0)$ 作直线 l 与椭圆相交于点 B ，则 y 轴上是否存在点 P ，使得线段 $|PA| = |PB|$ ，且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$ ？如果存在，求出点 P 坐标；否则请说明理由。

13. 如图，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且经过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ ，过椭圆的左顶点 A 作直线 $l \perp x$ 轴，点 M 为直线 l 上的动点（点 M 与点 A 不重合），点 B 为椭圆右顶点，直线 BM 交椭圆 C 于点 P 。



(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 求证： $AP \perp OM$ 。

(3) 试问： $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}$ 是否为定值？若是定值，请求出该定值；若不是，请说明理由。

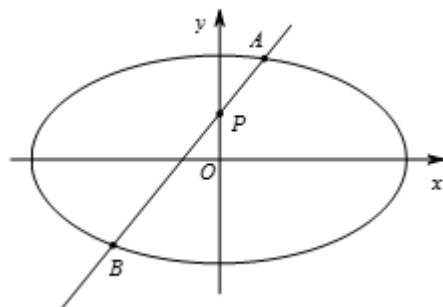
3. 共线比例问题

【解题思路】 在直线与圆锥曲线的综合题中，我们把一条直线上涉及到两条线段或者两个向量成比例的问题称之为共线问题。共线比例线段问题的解题思路主要利用相似转化为 x_1, x_2 或是 y_1, y_2 成比例的关系。

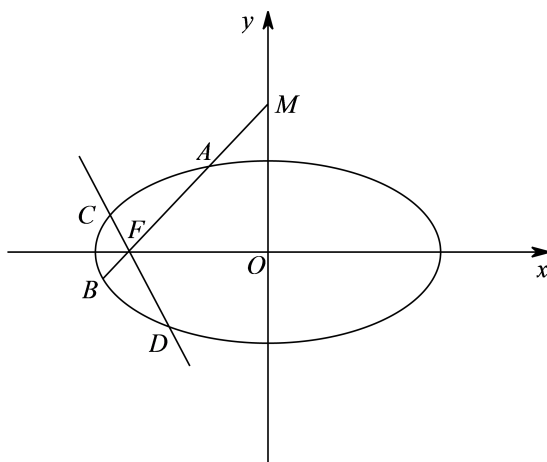
例如：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(0, t)$ ，

(1) 若 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \cdots (1) \\ y_1 - t = \lambda(y_2 - t) \cdots (2) \end{cases}$, 其中 (1) (2) 是等价的, 我们只选择其中一个运用.

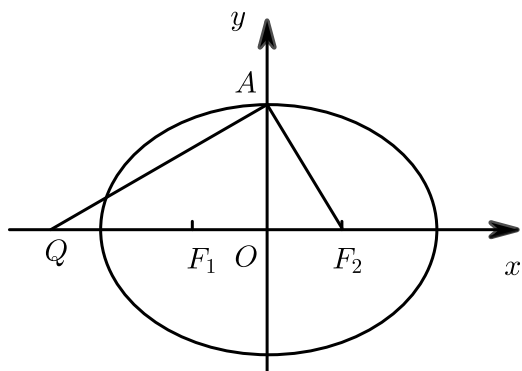
(2) 若 $|AP| = \lambda |BP|$, 则 $x_1 = -\lambda x_2$.



14. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$. 过 F 点的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点, 交 y 轴的正半轴于点 M .



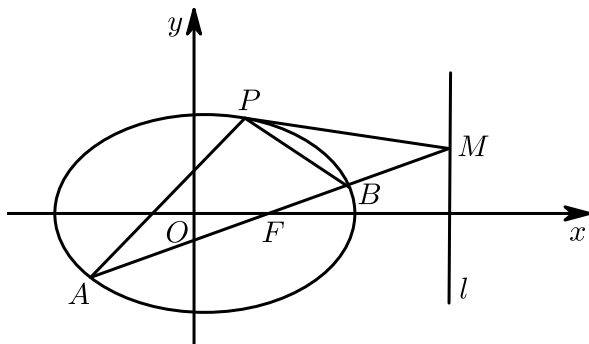
- (1) 求椭圆 E 的方程.
- (2) 过点 F 且与 l 垂直的直线交椭圆于 C 、 D 两点, 若四边形 $ACBD$ 的面积为 $\frac{4}{3}$, 求直线 l 的方程.
- (3) 设 $\overrightarrow{MA} = \lambda_1 \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB} = \lambda_2 \overrightarrow{BF}$, 求证: $\lambda_1 + \lambda_2$ 为定值.
15. 已知椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $F_1(0, \sqrt{5})$, 且经过点 $P_1(\frac{4}{3}, \sqrt{5})$.
- (1) 求椭圆 C_1 的标准方程.
- (2) 已知椭圆 C_2 的中心在原点, 焦点在 y 轴上, 且长轴和短轴的长分别是椭圆 C_1 的长轴和短轴的长的 λ 倍 ($\lambda > 1$), 过点 $C(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C_2 交于 A , B 两个不同的点, 若 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, 求 $\triangle OAB$ 面积取得最大值时直线 l 的方程.
16. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 过点 A 与 AF_2 垂直的直线交 x 轴负半轴于点 Q , 且 $2\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2Q} = \vec{0}$, 若过 A, Q, F_2 三点的圆恰好与直线 $l: x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ 相切. 过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l_1 与椭圆 C 交于 G, H 两点 (点 G 在点 M, H 之间).



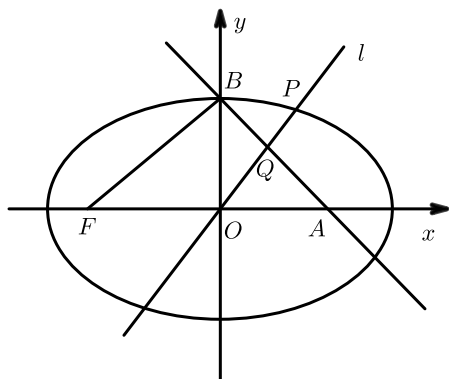
- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设直线 l_1 的斜率 $k > 0$ ，在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$ ，使得以 PG ， PH 为邻边的平行四边形是菱形。如果存在，求出 m 的取值范围，如果不存在，请说明理由；
- (3) 若实数 λ 满足 $\overrightarrow{MG} = \lambda \overrightarrow{MH}$ ，求 λ 的取值范围。

4. 几何关系综合问题

17. 如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，直线 l 的方程为 $x = 4$ 。



- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P ），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M ，记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问：是否存在常数 λ ，使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$ 。若存在求 λ 的值；若不存在，说明理由。
18. 已知点 $F(2, 0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点，且点 $P\left(2, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 在椭圆上。
- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 已知直线 l 与椭圆交于 M, N 两点，且坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$ ， $\angle MON$ 的大小是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由。
19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。



(1) 求椭圆的方程 .

(2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P , 且 l 与直线 AB 交于点 Q , 若

$$\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ \quad (O \text{ 为原点}) , \text{ 求 } k \text{ 的值 .}$$

20. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 椭圆的上顶点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0$.

(1) 求椭圆 C 的离心率 e .

(2) 若以点 $N(0, 2)$ 为圆心 , 且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$.

① 求此时椭圆 C 的方程 .

② 椭圆 C 上是否存在两点 A , B 关于直线 $l: y = kx - 1 (k \neq 0)$ 对称 , 若存在 , 求出 k 的取值范围 ; 若不存在 , 请说明理由 .