

01直线与圆练习题

1. 2016~2017学年陕西西安碑林区西安交通大学附属中学高一上学期期末第12题3分 ★★

已知点 $A(1, 3)$, $B(-2, -1)$. 若直线 $l: y = k(x - 2) + 1$ 与线段 AB 相交, 则 k 的取值范围是 () .

A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $(-\infty, -2]$

C. $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 直线 $l: y = k(x - 2) + 1$ 过点 $P(2, 1)$,

连接 P 与线段 AB 上的点 $A(1, 3)$ 时直线 l 的斜率最小, 为 $k_{PA} = \frac{1-3}{2-1} = -2$,

连接 P 与线段 AB 上的点 $B(-2, -1)$ 时直线 l 的斜率最大, 为 $k_{PB} = \frac{-1-1}{-2-2} = \frac{1}{2}$.

$\therefore k$ 的取值范围是 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

故选: D .

【标注】 【知识点】斜率计算

2. 2019~2020学年广东揭阳普宁市高一上学期期末第14题5分 ★★

直线 $kx - y + 1 = 3k$, 当 k 变动时, 所有直线都通过定点为 _____ .

【答案】 (3, 1)

【解析】 直线 $kx - y + 1 = 3k$ 可化成 $y = k(x - 3) + 1$, 所以恒过点 (3, 1) .

【标注】 【知识点】直线的一般式方程; 直线过定点问题

3. 2017~2018学年四川雅安高二上学期期末理科第15题5分 ★★★

不论 k 为何实数, 直线 $(2k - 1)x - (k + 3)y - (k - 11) = 0$ 恒通过一个定点, 这个定点的坐标是 _____ .

【答案】 (2, 3)

【解析】 直线 $(2k - 1)x - (k + 3)y - (k - 11) = 0$

即 $k(2x - y - 1) + (-x - 3y + 11) = 0$,

根据 k 的任意性可得 $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 不论 k 取什么实数时, 直线 $(2k-1)x - (k+3)y - (k-11) = 0$ 都经过一个定点 $(2, 3)$.

故答案为: $(2, 3)$.

【标注】【知识点】直线的一般式方程; 直线过定点问题

4. 2017~2018学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中文科第9题4分 ★★★

已知点 $P(2, -3)$, $Q(3, 2)$, 直线 $ax + y + 2 = 0$ 与线段 PQ 相交, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right]$

【解析】 解: 直线 $ax + y + 2 = 0$ 过定点 $M(0, -2)$, 画出图象, 如图,

$$\text{则 } k_{MQ} = \frac{-2-2}{0-3} = \frac{4}{3},$$

$$k_{MP} = \frac{-2-(-3)}{0-2} = -\frac{1}{2}.$$

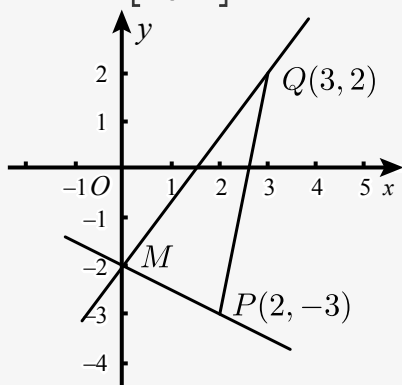
设直线 $ax + y + 2 = 0$ 与线段 PQ 相交于点 N ,

$$\text{则满足 } -\frac{1}{2} \leq k_{MN} \leq \frac{4}{3}.$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq -a \leq \frac{4}{3},$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right].$$



【标注】【知识点】两直线交点坐标

5. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十中学高二上学期月考第7题 ★★★

若直线 $l_1: y = kx - k + 1$ 与直线 l_2 关于点 $(3, 3)$ 对称, 则直线 l_2 一定过定点 ().

A. $(3, 1)$

B. $(2, 1)$

C. $(5, 5)$

D. $(0, 1)$

【答案】 C

【解析】 由于直线 $l_1: y = k(x-1) + 1$ 恒过定点 $(1, 1)$,

其关于点 $(3, 3)$ 对称的点为 $(5, 5)$,

又由于直线 $l_1: y = k(x-1) + 1$ 与直线 l_2 关于点 $(3, 3)$ 对称，
 $\therefore$ 直线 l_2 恒过定点 $(5, 5)$.
 故选 C .

【标注】【知识点】直线过定点问题

6. 2020~2021学年10月天津和平区天津市益中学校高二上学期月考第4题 ★★★

已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1, 2)$ ， AB 边上的中线 CM 所在直线的方程为 $x + 2y - 1 = 0$ ， $\angle ABC$ 的平分线 BH 所在直线的方程为 $y = x$ ，则直线 BC 的方程为 () .

- A. $2x - 3y - 1 = 0$ B. $2x + 3y - 1 = 0$ C. $3x - 2y - 1 = 0$ D. $3x - 2y + 1 = 0$

【答案】 A

【解析】 由题意可知，点 B 在直线 $y = x$ 上，
 可设点 B 的坐标是 (m, m) ，
 则 AB 的中点 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$ 在直线 CM 上，
 所以 $\frac{m+1}{2} + 2 \times \frac{m+2}{2} - 1 = 0$ ，
 解得 $m = -1$ ，
 故点 $B(-1, -1)$.
 设点 A 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $A'(x_0, y_0)$ ，
 则由 $\begin{cases} \frac{y_0 - 2}{x_0 - 1} = -1 \\ \frac{y_0 + 2}{2} = \frac{x_0 + 1}{2} \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ ，
 则 $A'(2, 1)$.
 易知 A' 在直线 BC 上，
 所以直线 BC 的方程为 $\frac{y+1}{1+1} = \frac{x+1}{2+1}$ ，
 即 $3(y+1) = 2(x+1)$ ，
 即 $2x - 3y - 1 = 0$.
 故选 A .

【标注】【知识点】根据直线的位置关系求直线的方程

7. 2017~2018学年天津高二上学期期中文科第12题5分 ★★★

一只虫子从点 $(0, 0)$ 出发，先爬行到直线 $l: x - y + 1 = 0$ 上的 P 点，再从 P 点出发爬行到点 $A(1, 1)$ ，
 则虫子爬行的最短路程是 _____ .

【答案】 2

【解析】设 $A(1,1)$ 关于直线 $y = x + 1$ 的对称点是 $B(a, b)$,

连接 OB 和直线 $y = x + 1$ 交于 C 点,

则 $OC + CA$ 最短,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{b-1}{a-1} = -1 \\ \frac{b+1}{2} = \frac{a+1}{2} + 1 \end{cases},$$

解得 $B(0, 2)$,

故直线 OB 和 $y = x + 1$ 的交点是 $(0, 1)$,

故 $OC + CA = 1 + 1 = 2$.

故答案为: 2.

【标注】【知识点】点或直线的对称问题; 直线的一般式方程

8. 2020~2021学年4月陕西西安碑林区西北工业大学附属中学高一下学期月考第15题4分 ★★★

已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是单位向量, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 _____.

【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】 $\because \vec{a}$, $\vec{b}$ 是单位向量, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$,

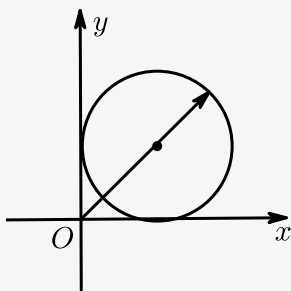
$\therefore$ 设 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (x, y)$,

则 $\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = (x - 1, y - 1)$,

$\therefore |\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$,

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$,

故向量 $\vec{c}$ 的终点在以 $(1, 1)$ 为圆心, 半径等于 1 的圆上,



$\therefore |\vec{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{1^2 + 1^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$,

故答案为: $\sqrt{2} + 1$.

【标注】【知识点】向量的模; 利用向量数量积求模长

9. 2017~2018学年10月福建福州长乐市长乐高级中学高三上学期月考文科第7题4分 ★★

若直线 $l_1: x + ay + 6 = 0$ 与 $l_2: (a - 2)x + 3y + 2a = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为 ().

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\frac{1}{a} = \frac{a-2}{3} \Rightarrow a = -1, a = 3$ (舍),
 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{18 - 2}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

故选 B.

【标注】 【知识点】 两平行直线之间的距离

【思想】 方程思想

【素养】 数学运算

10. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中第11题4分 ★★

已知直线 l 与两直线 $l_1: 2x - y + 3 = 0$ 和 $l_2: 2x - y - 1 = 0$ 平行且距离相等, 则 l 的方程为 _____.

【答案】 $2x - y + 1 = 0$

【解析】 设所求的直线方程为 $2x - y + c = 0 (c \neq 3, c \neq -1)$,

分别在 $l_1: 2x - y + 3 = 0$ 和 $l_2: 2x - y - 1 = 0$ 上取点 $A(0, 3)$ 和 $B(0, -1)$,

则此两点到 $2x - y + c = 0$ 的距离相等, 即 $\frac{|-3 + c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$,

解得 $c = 1$, 故直线 l 的方程为 $2x - y + 1 = 0$.

【标注】 【知识点】 两平行直线之间的距离

11. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高二上学期期中理科第9题4分 ★★

若圆 C 的半径为 1, 其圆心与点 $(1, 0)$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则圆 C 的标准方程为 _____.

【答案】 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

【解析】 设圆 C 的圆心为 (a, b) ,

$\therefore$ 点 $C(a, b)$ 与 $(1, 0)$ 关于 $y = x$ 对称,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} \frac{b+0}{2} = \frac{a+1}{2} \\ \frac{b-0}{a-1} = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 圆心坐标为 $(0, 1)$, 半径为 1,

$\therefore$ 圆方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

【标注】 【知识点】 圆的标准方程问题

12. 2020~2021学年四川成都温江区成都七中实验学校高二上学期期末模拟理科第13题5分 ★★

若圆 C 经过坐标原点和点 $(4, 0)$ ，且与直线 $y = 1$ 相切，则圆 C 的方程是 _____ .

【答案】 $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

【解析】 方法一：因为圆过原点，所以可设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$.

因为圆过点 $(4, 0)$ ，将点 $(4, 0)$ 代入圆的方程得 $D = -4$ ，

即圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x + Ey = 0$.

又圆与直线 $y = 1$ 相切，将其代入圆的方程得 $x^2 + 1 - 4x + E = 0$ ，

又方程只有一个解，所以 $\Delta = 4^2 - 4(1 + E) = 0$ ，解得 $E = 3$.

故所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$ ，即 $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

方法二：设圆的圆心坐标为 (a, b) ，半径为 r ，

因为圆 C 经过坐标原点和点 $(4, 0)$ ，且与直线 $y = 1$ 相切，

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 \\ (a-4)^2 + b^2 = r^2 \\ \sqrt{(b-1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} , \\ \text{解得 } & \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{2} \\ r = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

即所求圆的方程为 $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

故答案为： $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题

13. 2009年高考真题宁夏卷文科第5题5分 ★★

已知圆 $C_1: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，圆 C_2 与圆 C_1 关于 $x - y - 1 = 0$ 对称，则圆 C_2 的方程为 () .

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$

B. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$

D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

【答案】 B

【解析】 $C_1(-1, 1)$ ，设 $C_2(a, b)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} k_{C_1 C_2} \cdot k = -1 \\ x_{\text{中}} - y_{\text{中}} - 1 = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{b-1}{a+1} \cdot 1 = -1 \\ \frac{a-1}{2} - \frac{b+1}{2} - 1 = 0 \end{cases} .$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} .$$

$\therefore C_2(2, -2)$.

又 $\because r_2 = r_1 = 1$.

$\therefore$ 圆 C_2 的方程为 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$.

故选 B .

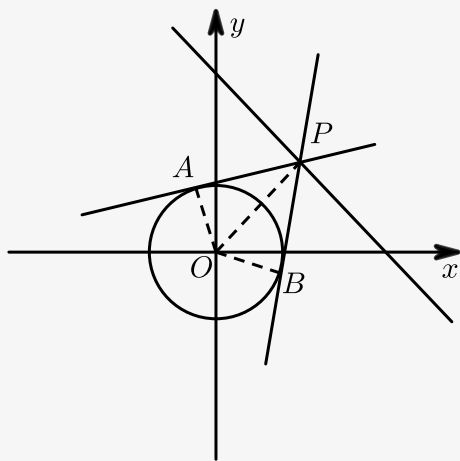
【标注】【知识点】圆的标准方程与一般方程

14. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期中第14题4分 ★★★

过直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上的点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 若两条切线的夹角是 60° , 则点 P 的坐标是 _____ .

【答案】 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【解析】 如图, 根据题意画出相应的图形,



直线 PA 和 PB 为过点 P 的两条切线,

且 $\angle APB = 60^\circ$. 设点 P 的坐标为 (a, b) ,

连接 OP, OA, OB , $\therefore OA \perp AP, OB \perp BP, PO$ 平分 $\angle APB$.

$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ, \angle APO = \angle BPO = 30^\circ$.

又 $\because$ 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 1, $\therefore OA = OB = 1$.

$\therefore OP = 2OA = 2OB = 2 \therefore \sqrt{a^2 + b^2} = 2$,

即 $a^2 + b^2 = 4$ ①. 又点 P 在直线 $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上,

$\therefore a + b - 2\sqrt{2} = 0$ ②. 联立①②解得: $a = b = \sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】圆的切线的相关问题

15. 2017~2018学年云南保山腾冲县腾冲县第八中学高一上学期期末 ★★★

圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上的点到直线 $x + y - 14 = 0$ 的最大距离与最小距离的差是()

A. 36

B. 18

C. $5\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$ **【答案】** D

【解析】 解：∵圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 的圆心为 $(2, 2)$ ，半径 R 为 $3\sqrt{2}$ ，
 圆心到直线 $x + y - 14 = 0$ 的距离为 $\frac{|2 + 2 - 14|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} > 3\sqrt{2}$ ，
 ∴圆上的点到直线的最大距离与最小距离的差是 $2R = 6\sqrt{2}$ ，
 故选：D。

【标注】【知识点】直线与圆的相离问题

16.

2017~2018学年天津武清区高二上学期期末理科（宝坻区、蓟州区、宁河区、静海区联考）第7题4分

★★★

直线 $y = kx - k$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 3$ 的位置关系是()

A. 相交

B. 相离

C. 相切

D. 与 k 取值有关**【答案】** A

【解析】 解：直线 $y = kx - k = k(x - 1)$ 过定点 $A(1, 0)$ ，
 圆心坐标为 $C(2, 0)$ ，半径 $r = \sqrt{3}$ ，
 则 $|AC| = 2 - 1 = 1 < \sqrt{3}$ ，
 则点 A 在圆内，
 则直线 $y = kx - k$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 3$ 恒相交。
 故选：A。

【标注】【知识点】直线与圆的位置判断

17. 2017~2018学年天津高二上学期期中文科第14题5分 ★★★

若圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2by - 1 + b^2 = 0 (b \in \mathbf{R})$ 恰有三条公切线，则 $a + b$ 的最大值为 _____。

【答案】 $3\sqrt{2}$ **【解析】** 从两个圆有三个公切线可知两圆外切，分别将两圆方程化为标准方程可得：

$$C_1: (x + a)^2 + y^2 = 4, \quad C_2: x^2 + (y - b)^2 = 1,$$

圆心分别为 $C_1(-a, 0)$ ， $C_2(0, b)$ ，半径分别为 $r_1 = 2$ ， $r_2 = 1$ ，

$$\text{则有 } |C_1C_2|^2 = a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2 = 9,$$

而 $a+b=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab}\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}=3\sqrt{2}$,
当且仅当 $a=b=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时等号成立 .

【标注】【知识点】两圆的公切线条数及方程

【素养】逻辑推理；数学运算

18. 2018~2019学年10月北京海淀区首都师范大学附属中学高二上学期月考第4题5分 ★★★

已知点 $M(a,b)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外, 则直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是().

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 不确定

【答案】 B

【解析】 由点 $M(a,b)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外, 得 $a^2+b^2>1$, 所以圆心 O 到直线 $ax+by=1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$, 故直线与圆 O 相交 .

故选 B .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】圆与圆的位置关系