

01直线与圆

1. 直线方程

直线方程

1. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第8题5分 ★★

已知点 $A(2, 3)$, $B(-3, -2)$, 若直线 l 过点 $P(1, 1)$ 与线段 AB 相交, 则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 () .

A. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

B. $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$

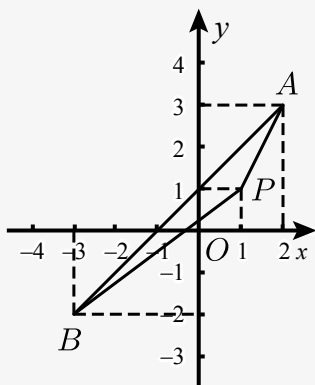
C. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right] \cup [2, +\infty)$

D. $(-\infty, 2]$

【答案】 C

【解析】 直线 PA 的斜率 $k_{PA} = \frac{3-1}{2-1} = 2$, 直线 PB 的斜率 $k_{PB} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}$,
结合图形可得直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $k \geq 2$ 或 $k \leq \frac{3}{4}$.

故选 C.



【标注】 【素养】 数学抽象

【素养】 数学运算

【知识点】 斜率随倾斜角的变化规律

【知识点】 斜率计算

2. 2017~2018学年天津和平区高二上学期期中理科第2题3分 ★★

在 x 轴、 y 轴上的截距分别是 2、-3 的直线方程为 () .

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

B. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

C. $\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$

【答案】 B

【解析】 由直线的截距式方程： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 结合题意知，
 代入 $a = 2$ ， $b = -3$ ，
 可得直线方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ ，即 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ 。
 故选 B。

【标注】【知识点】直线的截距式方程

3. 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第15题4分 ★★★

经过点 $(4, 1)$ 且在两坐标轴上的截距相等的直线方程是 _____。

【答案】 $x - 4y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$

【解析】 解：当直线过原点时，直线的方程为 $y = \frac{1}{4}x$ ，即 $x - 4y = 0$ 。
 当直线不过原点时，设直线的方程为 $x + y = k$ ，把点 $A(4, 1)$ 代入直线的方程可得 $k = 5$ ，
 故直线方程是 $x + y - 5 = 0$ 。
 综上，所求的直线方程为 $x - 4y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$ ，
 故答案为： $x - 4y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$ 。

【标注】【知识点】直线的截距式方程

4. 2018~2019学年江苏南京高一期末 ★★★

已知直线 l 的倾斜角是直线 $y = x + 1$ 的倾斜角的 2 倍，且过定点 $P(3, 3)$ ，则直线 l 的方程为 _____。

【答案】 $x = 3$

【解析】 解：因为直线 $y = x + 1$ 的斜率为 1，倾斜角为 45° ，又直线 l 的倾斜角是直线 $y = x + 1$ 的倾斜角的 2 倍，所以直线 l 的倾斜角为 90° ，其斜率不存在。又直线 l 过定点 $P(3, 3)$ ，所以直线 l 的方程为 $x = 3$ 。

【标注】【知识点】求直线的方程

5. 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四中学高二上学期月考第10题4分 ★★★

不论 k 为何实数，直线 $(2k - 1)x - (k + 3)y - (k - 11) = 0$ 恒过一个定点，这个定点的坐标是 _____。

【答案】 $(2, 3)$

【解析】 解：直线 $(2k - 1)x - (k + 3)y - (k - 11) = 0$ ，

即 $k(2x - y - 1) + (-x - 3y + 11) = 0$,

根据 k 的任意性可得 $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 不论 k 取什么实数时, 直线 $(2k - 1)x - (k + 3)y - (k - 11) = 0$ 都经过一个定点 $(2, 3)$.

故答案为: $(2, 3)$.

【标注】【知识点】直线过定点问题

6. 2020~2021学年天津津南区天津市咸水沽一中高二上学期期中第2题5分 ★★★

直线 l 绕它与 x 轴的交点逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 得到直线 $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$, 则直线 l 的直线方程 ()

- A. $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ B. $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ C. $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ D. $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$

【答案】 B

【解析】 直线 $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$ 的斜率等于 $-\sqrt{3}$, 设倾斜角等于 θ , 即 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 绕它与 x 轴的交点 $(\sqrt{3}, 0)$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得到的直线的倾斜角等于 $\theta - \frac{\pi}{3}$, 故所求直线的斜率为 $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, 故所求的直线方程为 $y - 0 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$, 即 $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$, 故选 B.

【标注】【知识点】直线的点斜式方程

【知识点】倾斜角计算

7. 2017~2018学年天津红桥区高二上学期期中文科第8题4分 ★★★

函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ ($mn > 0$) 上, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】 B

【解析】 函数 $y = a^{1-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象恒过定点 $A(1, 1)$,

$\therefore$ 点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ ($mn > 0$) 上,

$$\therefore m + n = 1.$$

$$\text{则 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (m + n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4,$$

当且仅当 $m = n = \frac{1}{2}$ 时取等号,

当 $m = n = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 取最小值, 最小值为 4.

故选: B.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；指数函数的图象及性质

🔗 直线间的位置关系

8. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考第13题4分 ★★★

若直线 m 被两平行线 $l_1: x - y + 1 = 0$ 与 $l_2: x - y + 3 = 0$ 所截得的线段的长为 $2\sqrt{2}$ ，则 m 的倾斜角可以是① 15° ；② 30° ；③ 45° ；④ 60° ；⑤ 75° 。

其中正确答案的序号是 _____。

【答案】①⑤

【解析】解：很明显直线 $l_1 \parallel l_2$ ，直线 l_1, l_2 间的距离 $d = \frac{|1-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 。

设直线 m 与直线 l_1, l_2 分别相交于点 B, A ，

则 $|AB| = 2\sqrt{2}$ 。过点 A 作直线 l 垂直于直线 l_1 ，垂足为 C ，

则 $|AC| = d = \sqrt{2}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin \angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\angle ABC = 30^\circ$ 。

又因为直线 l_1 的倾斜角为 45° ，

所以直线 m 的倾斜角为 $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ 或 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ 。

【标注】【知识点】两平行直线之间的距离

9. 2017~2018学年天津武清区高二上学期期中文科第10题4分 ★★★

直线 l_1, l_2 分别过点 $A(0, 2)$ ， $B(4\sqrt{2}, 0)$ ，它们分别绕点 A, B 旋转，但始终保持 $l_1 \perp l_2$ 。若 l_1 与 l_2 的交点为 P ，坐标原点为 O ，则线段 OP 长度的取值范围是()

A. $[0, 6]$

B. $[0, 2]$

C. $[0, 3]$

D. $[0, 4\sqrt{2}]$

【答案】A

【解析】解：直线 l_1, l_2 分别过点 $A(0, 2)$ ， $B(4\sqrt{2}, 0)$ ，它们分别绕点 A, B 旋转，但始终保持 $l_1 \perp l_2$ 。

设直线 l_1, l_2 的斜率存在时，且斜率分别是： k_1 和 k_2 ，

则：直线 l_1 的直线方程为： $y - 2 = k_1 x$ ，

直线 l_2 的直线方程为： $y = k_2(x - 4\sqrt{2})$ ，

由于保持 $l_1 \perp l_2$ 。

则： $k_1 \cdot k_2 = -1$ ，

整理得： $y(y - 2) = -x(x - 4\sqrt{2})$ ，

转化为： $(y-1)^2 + (x-2\sqrt{2})^2 = 9$ ，

转化为参数方程为： $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} + 3\cos\theta \\ y = 1 + 3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，

$$|OP| = \sqrt{(2\sqrt{2} + 3\cos\theta)^2 + (1 + 3\sin\theta)^2} = \sqrt{18 + 18\sin(\theta + \varphi)}$$

①当 $\theta + \varphi = \frac{3}{2}\pi$ 时， $|OP| = 0$ ，

②当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ， $|OP| = 6$ 。

即当 l_1 与 y 轴重合， l_2 与 x 轴重合时，交点 P 为原点， $|OP| = 0$ ；

当过 A 点的直线平行于 x 轴，过 B 点的直线平行于 y 轴时，交点为 $P(4\sqrt{2}, 2)$ ，

$$|OP| = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6。$$

故线段 OP 长度的取值范围是 $[0, 6]$ 。

故选：A。

【标注】【知识点】圆的参数方程

10. 2020~2021学年天津西青区高二上学期期末第3题5分 ★★★

已知直线 $x + ay - 1 = 0$ 和直线 $ax + 4y + 2 = 0$ 互相平行，则 a 的取值是()

A. 2

B. ± 2

C. -2

D. 0

【答案】A

【解析】解： $\because$ 直线 $x + ay - 1 = 0$ 和直线 $ax + 4y + 2 = 0$ 互相平行，

$\therefore 1 \times 4 - a \cdot a = 0$ ，解得 $a = 2$ 或 $a = -2$ ，

经验证当 $a = -2$ 时两直线重合，应舍去。

故选：A。

【标注】【知识点】直线的平行

11. 2017~2018学年云南德宏芒市云南德宏州芒市第一中学高二上学期期中文科 ★★★

已知点 $A(1, 2)$ ， $B(3, 1)$ ，则线段 AB 的垂直平分线的方程是()

A. $4x + 2y = 5$

B. $4x - 2y = 5$

C. $x + 2y = 5$

D. $x - 2y = 5$

【答案】B

【解析】解：线段 AB 的中点为 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ， $k_{AB} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 垂直平分线的斜率 $k = \frac{-1}{k_{AB}} = 2$ ，

$\therefore$ 线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y - \frac{3}{2} = 2(x - 2) \Rightarrow 4x - 2y - 5 = 0$ ，

故选：B。

【标注】【知识点】求直线的方程

【知识点】直线的点斜式方程

12. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华中学高二上学期月考第16题4分 ★★★

已知 a, b 为正数, 且直线 $x - (2b - 3)y + 6 = 0$ 与直线 $2bx + ay - 5 = 0$ 互相垂直, 则 $2a + 3b$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{25}{2}$

【解析】 $\because$ 直线 $x - (2b - 3)y + 6 = 0$ 与直线 $2bx + ay - 5 = 0$ 互相垂直,

$$\therefore 2b - (2b - 3)a = 0,$$

$$\therefore 3a + 2b = 2ab, \text{ 两边同除以 } 2ab \text{ 可得 } \frac{3}{2b} + \frac{1}{a} = 1,$$

$\because a, b$ 都是正实数,

$$\therefore 2a + 3b = (2a + 3b) \left(\frac{3}{2b} + \frac{1}{a} \right)$$

$$= 2 + \frac{9}{2} + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a}$$

$$\geq \frac{13}{2} + 2\sqrt{\frac{3b}{a} \cdot \frac{3a}{b}}$$

$$= \frac{13}{2} + 6$$

$$= \frac{25}{2},$$

当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{3a}{b}$, 即 $a = b = \frac{5}{2}$ 时, 上式取到最小值 $\frac{25}{2}$.

故答案为: $\frac{25}{2}$.

【标注】【知识点】直线的垂直; 利用基本不等式求最值

13. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考第14题4分 ★★★

已知直线 $l: 2x - 3y + 1 = 0$, 则直线 $m: 3x - 2y - 6 = 0$ 关于直线 l 的对称直线 m' 的方程为 _____.

【答案】 $9x - 46y + 102 = 0$

【解析】 在直线 m 上取一点, 如 $M(2, 0)$,

则 $M(2, 0)$ 关于直线 l 的对称点 M' 必在直线 m' 上.

设对称点为 $M'(a, b)$,

$$\text{则 } \begin{cases} 2 \times \frac{a+2}{2} - 3 \times \frac{b+0}{2} + 1 = 0 \\ \frac{b-0}{a-2} \times \frac{2}{3} = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } M' \left(\frac{6}{13}, \frac{30}{13} \right).$$

设直线 m 与直线 l 的交点为 N ,

则由 $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$, 得 $N(4, 3)$.

又: 直线 m' 经过点 $N(4, 3)$,

$\therefore$ 由两点式得直线 m' 的方程为 $9x - 46y + 102 = 0$.

【标注】【知识点】两直线交点坐标; 判定两条直线的位置关系; 直线的垂直; 点或直线的对称问题; 直线的两点式方程; 直线方程的五种形式的联系和使用范围的区别

14. 2017~2018学年5月天津河北区天津市第二中学高一下学期月考理科第9题4分 ★★★

从 P 点发出的光线 l 经过直线 $x - y - 2 = 0$ 反射, 若反射光线恰好通过点 $Q(5, 1)$, 且点 P 的坐标为 $(3, -2)$, 则光线 l 所在的直线方程是 ().

- A. $x = 3$ B. $y = 1$ C. $x - 2y - 7 = 0$ D. $x + 2y + 1 = 0$

【答案】 A

【解析】 设 Q 关于 $x - y - 2 = 0$ 对称点为 $Q'(a, b)$,

$$l_{QQ'}: \frac{y-1}{b-1} = \frac{x-5}{a-5},$$

$$k_{QQ'} = \frac{b-1}{a-5} = -1,$$

$$\text{即 } b = -a + 6,$$

$$d_1 = \frac{|5-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2},$$

$$d_2 = \frac{|a-b-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a-b-2|}{\sqrt{2}},$$

$$d_1 = d_2 \Rightarrow |a-b-2| = 2,$$

$$(a-b-2)^2 = 4,$$

$$[a-(-a+6)-2]^2 = 4,$$

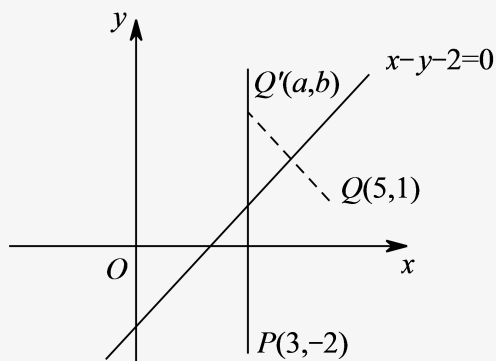
$$(a-4)^2 = 1,$$

$$\therefore \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases},$$

$$Q'(3, 3),$$

$$l_{PQ'}: x = 3.$$

故选 A.



【标注】【知识点】反射问题

距离

15. 2019~2020学年3月陕西西安碑林区西安市铁一中学高一下学期月考第6题5分 ★★

过 $P(1, 2)$ 且与原点 O 距离最大的直线 l 的方程 () .

- A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $2x + y - 4 = 0$ C. $x + 3y - 7 = 0$ D. $3x + y - 5 = 0$

【答案】A

【解析】由题意得：

该直线必与直线 OP 垂直，

$$\because k_{OP} = 2,$$

$$\therefore k_l = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore l: y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \text{ 即 } x + 2y - 5 = 0.$$

故选 A .

【标注】【知识点】直线的垂直；判定两条直线的位置关系；斜率计算

16. 2017~2018学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中理科第11题 ★★

两条直线 $l_1: 3ax - y - 2 = 0$ 和 $l_2: (2a - 1)x + 5ay - 1 = 0$ 分别过定点 A, B ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{13}{5}$

【解析】 $\because 3ax - y - 2 = 0$,

$$\text{化简为 } y + 2 = 3ax,$$

$$\therefore \text{直线过定点 } A(0, -2).$$

$$\because \text{直线 } (2a - 1)x + 5ay - 1 = 0,$$

$$\text{化简为 } a(2x + 5y) = x + 1,$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\therefore B \text{ 坐标为 } \left(-1, \frac{2}{5}\right),$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(-1-0)^2 + \left(\frac{2}{5}+2\right)^2},$$

$$= \frac{13}{5}.$$

故答案为: $\frac{13}{5}$.

【标注】【知识点】直线的一般式方程

17. 2016~2017学年广东汕头潮阳区潮阳实验学校高二上学期期中 ★★★

设两条直线的方程分别为 $x + y + a = 0, x + y + b = 0$, 已知 a, b 是方程 $x^2 + x + c = 0$ 的两个实根, 且

$0 \leq c \leq \frac{1}{8}$, 则这两条直线之间距离 d 的最大值和最小值分别是()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}$ B. $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}, \frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】两平行直线间的距离为 $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, 本题可转化为求 $|a-b|$ 的最值问题, $\because a, b$ 是方程

$x^2 + x + c = 0$ 的两个实根,

$$\therefore a + b = -1, ab = c, \therefore |a-b| = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{1-4c}, \because 0 \leq c \leq \frac{1}{8}, \therefore 0 \leq 4c \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq 1-4c \leq 1$$

,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{1-4c} \leq 1, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |a-b| \leq 1, \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \frac{1}{2} \leq d \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \text{两直}$$

线间距离 d 的最小值和最大值分别为 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选D.

【标注】【知识点】点到直线的距离公式

18. 2017~2018学年天津高一下学期期中七校联考第15题4分 ★★★

已知动直线 $l_1: x + my - 1 = 0$ 过点定 A , 动直线 $l_2: mx - y - 2m + 1 = 0$ 过定点 B , 直线 l_1 与 l_2 交于点 P , 则 $|PA|^2 + |PB|^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】 $A(1, 0), B(2, 1)$.

$$k_{l_1} = \frac{1}{m}, k_{l_2} = m.$$

$\therefore l_1, l_2$ 始终垂直.

$\therefore PA \perp PB$.

$$\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (2-1)^2 + 1^2 = 2.$$

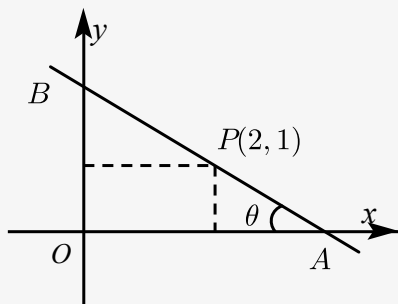
【标注】【知识点】判定两条直线的位置关系；直线的垂直

19. 2017~2018学年天津和平区天津市耀华中学高二上学期期中理科第10题4分 ★★★

过点 $P(2,1)$ 作直线 l 分别交 x 轴、 y 轴的正半轴于 A 、 B 两点，则使 $|PA| \cdot |PB|$ 的值最小时直线 l 的方程为 _____ .

【答案】 $x + y - 3 = 0$

【解析】 如图所示：



设 $\angle BAO = \theta$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$,

$$|PA| = \frac{1}{\sin \theta}, \quad |PB| = \frac{2}{\cos \theta},$$

$$\therefore |PA| \cdot |PB| = \frac{2}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{4}{\sin 2\theta},$$

$\therefore 2\theta = 90^\circ$, 即 $\theta = 45^\circ$ 时, $|PA| \cdot |PB|$ 取最小值,

此时、直线的倾斜角为 135° , 斜率为 -1 ,

$\therefore$ 直线的方程为 $y - 1 = -1(x - 2)$,

即 $x + y - 3 = 0$.

【标注】【知识点】根据直线的位置关系求直线的方程

【素养】逻辑推理；数学运算

20. 2018~2019学年11月广东广州海珠区广州市第五中学高三上学期月考理科第9题5分 ★★

已知动直线 $l_0: ax + by + c - 2 = 0$ ($a > 0, c > 0$) 恒过点 $P(1, m)$ 且 $Q(4, 0)$ 到动直线 l_0 的最大距离为 3

, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{2}{c}$ 的最小值为()

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. 1

D. 9

【答案】 B

【解析】 动直线 $l_0: ax + by + c - 2 = 0$ ($a > 0, c > 0$) 恒过点 $P(1, m)$, $\therefore a + bm + c - 2 = 0$.

又 $Q(4, 0)$ 到动直线 l_0 的最大距离为 3,

$$\therefore \sqrt{(4-1)^2 + m^2} = 3, \text{ 解得 } m = 0.$$

$$\therefore a+c=2.$$

$$\text{则 } \frac{1}{2a} + \frac{2}{c} = \frac{1}{2}(a+c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + \frac{c}{2a} + \frac{2a}{c} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{c}{2a} \cdot \frac{2a}{c}} \right) = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $c=2a=\frac{4}{3}$ 时取等号.

故选：B.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

2. 直线与圆

圆的方程

21. 2019~2020学年吉林长春朝阳区长春外国语学校高二上学期期中文科第14题5分 ★★

一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上，则该圆的标准方程为 _____ .

【答案】 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

【解析】 方法一：假设圆经过的三个顶点为 $(-4, 0)$ ， $(4, 0)$ ， $(0, 2)$ ，则可知圆心在 y 轴上，

所以经过的点只能是 $(0, 2)$ ， $(0, -2)$ ， $(4, 0)$.

设圆心为 $(x, 0)$ ，可得 $|x - 4| = \sqrt{x^2 + 2^2}$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ ，

由此可知 $r = \frac{5}{2}$ ，故圆的标准方程是 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

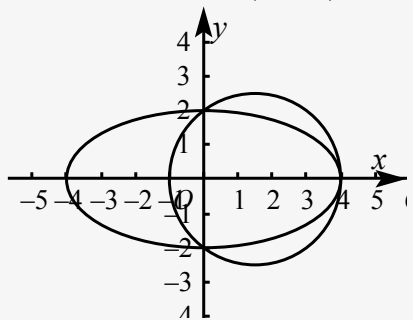
方法二：一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点，且圆心在 x 轴的正半轴上 .

可知圆经过椭圆的右顶点 $(4, 0)$ ，上下顶点 $(0, \pm 2)$ ，

设圆的圆心 $(a, 0)$ ，则 $\sqrt{(a - 0)^2 + (0 - 2)^2} = 4 - a$ ，解得 $a = \frac{3}{2}$ ，

圆的半径为： $\frac{5}{2}$ ，

所求圆的方程为： $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.



【标注】【知识点】圆的标准方程问题；椭圆坐标的取值范围

22. 2020~2021学年天津红桥区高二上学期期末第14题4分 ★★

已知圆 C 的圆心在 x 轴上，并且过点 $A(-1, 1)$ 和 $B(1, 3)$ ，则圆的方程是 _____ .

【答案】 $(x-2)^2 + y^2 = 10$

【解析】 $\because$ 圆 C 的圆心在 x 轴上，设圆心为 $M(a, 0)$ ，由圆过点 $A(-1, 1)$ 和 $B(1, 3)$ ，

由 $|MA| = |MB|$ ，可得 $MA^2 = MB^2$ ，

即 $(a+1)^2 + 1 = (a-1)^2 + 9$ ，求得 $a = 2$ ，

可得圆心为 $M(2, 0)$ ，半径为 $|MA| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$ ，

故圆的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 10$.

故答案为： $(x-2)^2 + y^2 = 10$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题

23. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期单元测试《圆与方程》第11题5分 ★★

以点 $A(1, 4)$ 、 $B(3, -2)$ 为直径的两个端点的圆的方程为 _____ .

【答案】 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$

【解析】 $\because$ 圆以 $A(1, 4)$ ， $B(3, -2)$ 为直径，

$\therefore$ 直径 $|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ ，

圆心为 AB 中点 $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$ ，即 $(2, 1)$ ，

$\therefore$ 半径为 $r = \sqrt{10}$ ，

$\therefore$ 圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.

【标注】【知识点】圆的标准方程问题

24. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期单元测试《圆与方程》第1题5分 ★★

方程 $x^2 + y^2 + 2ax - by + c = 0$ 表示圆心为 $C(2, 2)$ ，半径为 2 的圆，则 a ， b ， c 的值依次为 () .

A. 2、4、4

B. -2、4、4

C. 2、-4、4

D. 2、-4、-4

【答案】 B

【解析】 圆方程 $(x^2 + 2ax + a^2) + \left[y^2 - by + \left(-\frac{b}{2}\right)^2\right] = a^2 + \frac{b^2}{4} - c$ ，

即 $(x+a)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - c$ ，

圆心 $C(2, 2)$ ，半径为 2，

$$\therefore \begin{cases} a = -2 \\ \frac{b}{2} = 2 \\ a^2 + \frac{b^2}{4} - c = 2^2 = 4 \end{cases}, \text{联立解得} \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】圆的一般方程问题

【素养】数学运算

25. 2018~2019学年5月天津和平区天津市双菱中学高一下学期月考第13题 ★★

圆 $(x+1)^2 + y^2 = 5$ 关于直线 $y = x$ 对称的圆的标准方程为 _____.

【答案】 $x^2 + (y+1)^2 = 5$

【解析】圆 $(x+1)^2 + y^2 = 5$ 的圆心坐标为 $(-1, 0)$, 半径为 $\sqrt{5}$,

$\therefore$ 圆心 $(-1, 0)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点的坐标是 $(0, -1)$,

$\therefore$ 圆 $(x+1)^2 + y^2 = 5$ 关于直线 $y = x$ 对称的圆的标准方程是 $x^2 + (y+1)^2 = 5$.

【标注】【知识点】点或直线的对称问题

26. 2020~2021学年10月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高二上学期月考第7题4分 ★★

“方程 $x^2 + y^2 - 4y + k = 0$ 表示一个圆”是“ $0 < k < 4$ ”的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 $x^2 + y^2 - 4y + k = 0$,

$$x^2 + (y-2)^2 = 4-k,$$

$$4-k > 0,$$

$$\therefore k < 4,$$

“ $x^2 + y^2 - 4y + k = 0$ 表示一个圆”是“ $0 < k < 4$ ”的必要不充分条件.

故选 B.

【标注】【知识点】充要条件与解析几何结合

27. 2020~2021学年12月天津河西区天津市第四中学高三上学期月考第12题5分 ★★

已知圆 C 的圆心在直线 $x + y = 0$ 上, 圆 C 与直线 $x - y = 0$ 相切, 且被直线 $x - y - 3 = 0$ 截得的弦长为 $\sqrt{6}$, 则圆 C 的方程为 _____.

【答案】 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

【解析】 因为所求圆的圆心在直线 $x+y=0$ 上，

所以设圆的圆心为 $(a, -a)$.

又因为所求圆与直线 $x-y=0$ 相切，

所以半径 $r = \frac{2|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|a|$,

又所求圆与直线 $x-y-3=0$ 上截得的弦长为 $\sqrt{6}$,

圆心 $(a, -a)$ 到直线 $x-y-3=0$ 的距离 $d = \frac{|2a-3|}{\sqrt{2}}$,

所以 $d^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = r^2$, 即 $\frac{(2a-3)^2}{2} + \frac{3}{2} = 2a^2$,

解得 $a=1$,

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求圆的方程

直线与圆

28. 2020年高考真题天津卷第12题5分 ★★★

已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 解：根据题意，圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 r ;

则圆心到直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 的距离 $d = \frac{8}{\sqrt{1+3}} = 4$,

若 $|AB| = 6$, 则有 $r^2 = d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = 16 + 9 = 25$,

故 $r = 5$.

故答案为：5 .

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

29. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一下学期期末第10题3分 ★★★

若圆 $(x-2)^2 + y^2 = 9$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 2 , 则直线 l 的斜率的取值范围是 () .

A. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

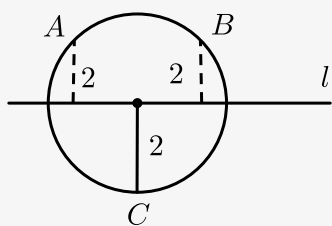
B. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

D. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

【答案】 C

【解析】 至少有 3 个不同的点到 l 的距离为 2 ,



$\therefore$ 圆心到 l 的距离 ≤ 1 ,

圆心 $(2, 0)$,

直线 $l: ax + by = 0$,

则 $y = -\frac{a}{b}x$,

$k = -\frac{a}{b}$,

$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$,

$\therefore 4a^2 \leq a^2 + b^2$,

$\therefore b^2 \geq 3a^2$,

$\therefore 3k^2 \leq 1$,

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$,

故选 C .

【标注】 【素养】 数学抽象；数学运算；逻辑推理

【思想】 数形结合思想

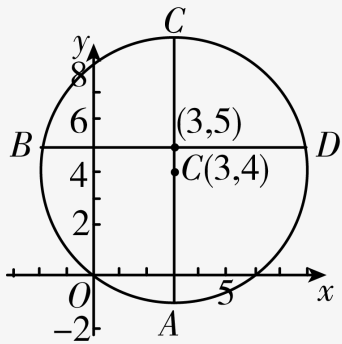
【知识点】 已知直线和圆的位置关系求参数；求斜率的范围

30. 2020~2021 学年天津南开区南开大学附属中学高二上学期期中第 12 题 5 分 ★★★

已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. 设该圆过点 $(3, 5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD , 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ____ .

【答案】 $20\sqrt{6}$

【解析】 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 化为标准方程为 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, 其圆心为 $C(3, 4)$, 半径为 5 . 该圆过点 $(3, 5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD , 即图中互相垂直的直径 AC 与弦 BD . $AC = 10$, $BD = 2\sqrt{5^2 - (5 - 4)^2} = 4\sqrt{6}$, 故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 10 \times 4\sqrt{6} = 20\sqrt{6}$.



【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

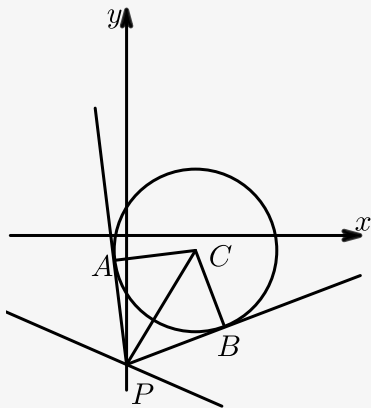
31. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高二上学期期中第8题5分 ★★★

已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ ，若直线 $y = 2kx - 4$ 上存在点 P ，使得过点 P 的圆 C 的两条切线互相垂直，则实数 k 的取值范围是（ ）。

- A. $k \leq -\frac{3}{8}$ B. $k \leq -\frac{3}{8}$ 或 $k \geq 0$ C. $k \leq -\frac{2}{3}$ D. $k \leq -\frac{2}{3}$ 或 $k \geq 0$

【答案】D

【解析】



已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ ，且圆心为 $C(1, -2)$ ，半径 $r = \sqrt{2}$ ，若直线 $y = 2kx - 4$ 上总存在点 P ，使得过点 P 的圆 C 的两条切线垂直，根据过点 P 的圆 C 的两条切线垂直可知四边形 $APBC$ 为正方形，

则 $PC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ ，

故只需要圆心 $C(1, -2)$ 到直线 $y = 2kx - 4$ 的距离 $d = \frac{|2k - 4 + 2|}{\sqrt{4k^2 + 1}} \leq 2$ ，

解得 $k \leq -\frac{2}{3}$ 或 $k \geq 0$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题

32. 2020~2021学年10月天津和平区天津市益中学校高二上学期月考第5题 ★★★

设圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的一条切线与 x 轴， y 轴分别交于点 A ， B ，则 $|AB|$ 的最小值为（ ）。

- A. 3 B. 4 C. 8 D. $4\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 设 $AB: y = kx + m$,

$\because x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 2,

又 $\because y = kx + m$,

$$\therefore kx - y + m = 0, \quad \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2,$$

$$\therefore m^2 = 4k^2 + 4,$$

$y = kx + m$ 与 y 轴交点 B 为 $(0, m)$, 与 x 轴交点 A 为 $(-\frac{m}{k}, 0)$,

$$AB^2 = (m - 0)^2 + (0 + \frac{m}{k})^2$$

$$= m^2 + \frac{m^2}{k^2}$$

$$= m^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= (4k^2 + 4) \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= 4 + 4 + 4k^2 + \frac{4}{k^2}$$

$$\geq 8 + 8 = 16,$$

$$AB \geq 4,$$

当且仅当 $k = \pm 1$ 时取得最小值.

故选 B.

【标注】 【知识点】 点到直线的距离公式；圆的切线的相关问题

33. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高二上学期期末第2题3分 ★★★

已知圆 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点, 则该直径所在直线的方程为 ().

A. $x + 2y - 5 = 0$

B. $x - 2y - 5 = 0$

C. $x - 2y + 5 = 0$

D. $x + 2y + 5 = 0$

【答案】 B

【解析】 由题得圆的圆心坐标为 $(1, -2)$,

所求的直线的斜率为 $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$,

所以所求直线的方程为 $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$,

即 $x - 2y - 5 = 0$.

故选 B.

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求直线的方程

34. 2018~2019学年天津津南区天津市咸水沽一中高三上学期开学考试文科第12题5分 ★★★

已知 a, b 均为正实数, 圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2(1-b) = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2b = 0$ 外切, 则 ab 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2(1-b) = 0$ 的圆心 $(a, 0)$, 半径 $a\sqrt{b}$,

圆 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2b = 0$ 的圆心 $(0, 1)$, 半径 $a\sqrt{b}$,

两个圆外切, 可得 $a^2 + 1 = 4a^2b$,

可得 $ab = \frac{a^2 + 1}{4a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{4a}} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = 1$ 时等号成立.

【标注】 【知识点】 圆与圆的位置判断

35. 2017年山东济宁高三二模理科第14题5分 ★★★

$x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 4by - 1 + 4b^2 = 0$ 恰有三条公切线, 若 $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 _____.

【答案】 1

【解析】 $\because x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 4by - 1 + 4b^2 = 0$ 恰有三条公切线,

$\therefore$ 两圆外切,

$\therefore$ 圆心距等于两半径之和, 即得: $a^2 + 4b^2 = 9$,

$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{a^2 + 4b^2}{9}$
 $= \frac{1}{9} \left(5 + \frac{4b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) \geq \frac{1}{9}(5 + 4) = 1$,

当且仅当 $a = 2b$ 时取等号,

则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最小值为 1,

故答案为: 1.

【标注】 【知识点】 倒数和形式; 利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用; 圆与圆的位置关系

36. 2020~2021学年天津和平区高二上学期期末第8题4分 ★★★

已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ 的公共弦长为 2, 则实数 a 的值为 () .

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】 A**【解析】** 根据题意，圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ ，

$$\text{则有 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 \end{cases}, \text{ 联立可得: } y = \frac{1}{a},$$

$$\text{即两圆公共弦所在直线的方程为 } y = \frac{1}{a}.$$

$$\text{圆 } C_1: x^2 + y^2 = 4, \text{ 其圆心为 } (0, 0), \text{ 半径 } r = 2,$$

$$\text{若公共弦的弦长为 } 2, \text{ 则圆 } C_1 \text{ 的圆心 } C_1 \text{ 到公共弦的距离 } d = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3},$$

$$\text{又由 } a > 0, \text{ 则有 } \frac{1}{a} = \sqrt{3}, \text{ 解可得 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选：A.

【标注】【知识点】圆的弦长的问题；相交弦所在直线方程

37. 2020~2021学年天津西青区高二上学期期末第14题5分 ★★★

圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ 的公共弦所在的直线方程为 _____，公共弦 = _____.

【答案】 $x + 2y - 1 = 0$ ； $2\sqrt{5}$ **【解析】** 根据题意，两个圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ ，

$$\text{联立可得 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0 \end{cases}, \text{ 则有 } 6x + 12y - 6 = 0,$$

$$\text{即 } x + 2y - 1 = 0,$$

$$\text{圆 } x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0,$$

$$\text{即 } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10, \text{ 其圆心为 } (2, 2), \text{ 半径 } r = \sqrt{10},$$

$$\text{圆心 } (2, 2) \text{ 到直线 } x + 2y - 1 = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|2 + 4 - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

$$\text{则公共弦长 } l = 2 \times \sqrt{10 - 5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{故答案为: } x + 2y - 1 = 0, 2\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】相交弦所在直线方程；圆的弦长的问题

38. 2017~2018学年天津东丽区天津一中滨海学校高二上学期期中文科第14题5分 ★★★

在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ ，若直线 $y = kx - 2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$

【解析】 将圆 C 的方程整理为标准方程得： $(x-4)^2 + y^2 = 1$ ，

$\therefore$ 圆心 $C(4, 0)$ ，半径 $r = 1$ ，

$\therefore$ 直线 $y = kx - 2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，

$\therefore$ 只需圆 $C' : (x-4)^2 + y^2 = 4$ 与 $y = kx - 2$ 有公共点，

$\therefore$ 圆心 $(4, 0)$ 到直线 $y = kx - 2$ 的距离 $d = \frac{|4k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 2$ ，

解得： $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$ 。

故答案为： $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ 。

【标注】 【知识点】圆与圆的位置关系；直线与圆的位置关系；点到直线的距离公式