

01空间几何体习题

1. 空间几何体

1. ★

下列命题中，正确的是（ ）。

- A. 有一个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- B. 有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- C. 有相邻两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱
- D. 底面是正多边形的棱柱是正棱柱

【答案】 C

【解析】 A. 有一个侧面是矩形的棱柱可能为斜棱柱，故 A 错误；

B. 有两个侧面是矩形的棱柱可能为斜棱柱，故 B 错误；

C. 底面是正多边形的棱柱可能为斜棱柱，故 D 错误。

故选 C。

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

2. ★

下列命题中，是真命题的是（ ）。

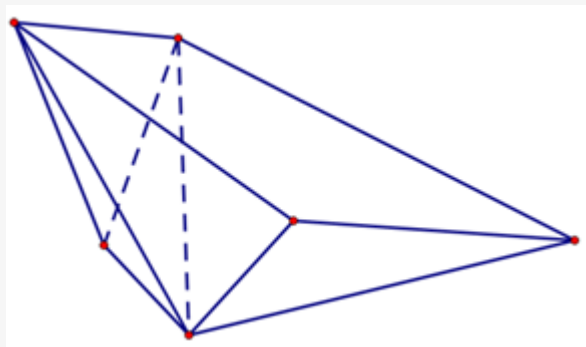
- A. 底面是正方形的棱锥是正四棱锥
- B. 各条侧棱都相等的棱锥是正棱锥
- C. 一个面是多边形，其余各个面是三角形的几何体是棱锥
- D. 正四面体是正三棱锥

【答案】 D

【解析】 选项 A：底面为正方形，顶点在底面的投影是底面中心才是正四棱锥，错误；

选项 B：各个侧面都是全等的等腰三角形的棱锥才是正棱锥，错误；

选项 C：如图：



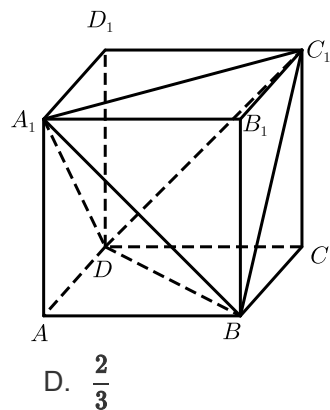
错误 .

故选 D.

【标注】【知识点】棱柱、棱锥、棱台的结构特征；空间几何体概念辨析问题

3. 2020~2021学年广东广州越秀区广州市第十六中学高一下学期期中第5题5分 ★★

如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 $C_1 - A_1BD$ 的体积为 () .



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 A

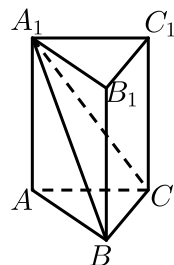
【解析】 由 $V_{B_1-A_1BC_1} = V_{D_1-A_1DC_1} = V_{C-BDC_1} = V_{A-A_1BD} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$,
 $V_{C_1-A_1BD} = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4V_{B_1-A_1BC_1} = 1 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

故选 A .

【标注】【知识点】等体积法

4. 2019~2020学年河北张家口崇礼县崇礼第一中学高一下学期期中第16题5分 ★★

如图，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$, $AA_1 = 3$, 则四棱锥 $A_1 - B_1C_1CB$ 的体积是 _____ .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$, $AA_1 = 3$,

则正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $V_1 = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 3 = 3\sqrt{3}$,

三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积为 $V_2 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 3 = \sqrt{3},$$

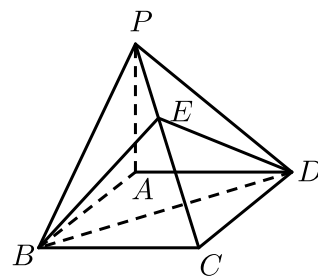
所以四棱锥 $A_1 - B_1C_1CB$ 的体积是 $V = V_1 - V_2 = 2\sqrt{3}$.

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】求三棱锥的体积

5. 2018~2019学年山东济南市中区山东省实验中学高一上学期期末第8题4分 ★★

如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形. $CE = 2EP$. 若三棱锥 $P - EBD$ 的体积为 V_1 , 三棱锥 $P - ABD$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值为 ().



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】 B

【解析】 设点 E 到平面 PBD 的距离为 h_1 , 点 C 到平面 PBD 的距离为 h_2 .

由 $CE = 2EP$ 得 $h_1 : h_2 = 1 : 3$.

$\because$ 点 A 到平面 PBD 的距离与点 C 到平面 PBD 的距离相等,

$\therefore$ 三棱锥 $P - ABD$ 的体积 $V_2 = V_{A-PBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBD} \cdot h_2$,

又三棱锥 $P - EBD$ 的体积 $V_1 = V_{E-PBD} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBD} \cdot h_1$,

则 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}$, 故选 B.

【标注】【知识点】等体积法

6. 2019~2020学年天津河西区天津市第四十二中学高一下学期期末第12题3分 ★★

一个圆锥的母线长为 20cm , 母线与轴的夹角为 30° , 则圆锥的高为 ().

A. $10\sqrt{3}\text{cm}$

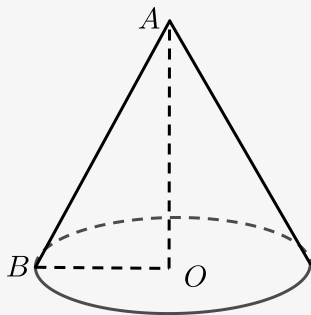
B. $20\sqrt{3}\text{cm}$

C. 20cm

D. 10cm

【答案】 A

【解析】 如图所示,



在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $AB = 20\text{cm}$, $\angle BAO = 30^\circ$,
 所以 $AO = AB \cdot \cos 30^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}$.
 故选 A.

【标注】【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

7. 2020~2021学年12月陕西西安雁塔区西安市曲江第一中学高一上学期月考第6题3分 ★

一个球的表面积是 16π , 那么这个球的体积为 ().

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{32\pi}{3}$ C. 16π D. 24π

【答案】 B

【解析】 一个球的表面积是 16π , 所以球的半径为 2,

那么这个球的体积为: $\frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

故选 B.

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题; 空间几何体的体积

8. 2018~2019学年江苏苏州吴江市高一下学期期中第3题5分 ★

已知三个球的体积之比为 $1:8:27$, 则它们的表面积之比为 ().

- A. $1:2:3$ B. $1:4:9$ C. $2:3:4$ D. $1:8:27$

【答案】 B

【解析】 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$,

$\therefore V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 8 : 27$,

$\therefore R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 3$,

$\therefore S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 4 : 9$.

【标注】【知识点】空间几何体的表面积; 空间几何体的体积; 组合体求体积、表面积问题

2. 外接球与内切球

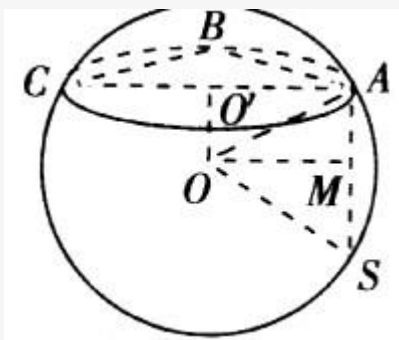
9. 2020~2021学年12月天津和平区天津市第五十五中学高三上学期月考第13题5分 ★★★

若三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $SA \perp$ 平面 ABC ,

$SA = 2\sqrt{3}$, $AB = 1$, $AC = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$, 则球 O 的表面积为 _____.

【答案】 16π

【解析】 $\because AB = 1$, $AC = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\therefore BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos 60^\circ = 3$, $\therefore BC = \sqrt{3}$,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.



$\because$ 三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $\therefore$ 斜边 AC 的中点是截面小圆的圆心 O' , 即小圆的半径 $r = \frac{1}{2}AC = 1$. $\because OA, OS$ 是半径, $\therefore \triangle AOS$ 为等腰三角形, 过 O 作 $OM \perp SA$, 则 M 为 SA 的中点, $\therefore OO' = AM = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3}$, $\therefore$ 球半径 $R = \sqrt{OO'^2 + r^2} = 2$, $\therefore$ 球的表面积为 $4\pi R^2 = 16\pi$.

【标注】 【知识点】圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征; 空间几何体的体积

10. 2017年辽宁丹东高三一模文科第16题5分 ★★

已知正三棱锥 $P-ABC$ 中所有顶点都在球 O 表面上, PA, PB, PC 两两互相垂直, 若三棱锥 $P-ABC$ 体积是 $\frac{4}{3}$, 则球 O 的表面积是 _____.

【答案】 12π

【解析】 正三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两互相垂直, 三棱锥 $P-ABC$ 体积是 $\frac{4}{3}$, 则

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PA \times PB \times PC = \frac{4}{3},$$

$$\therefore PA = PB = PC, \therefore PA = PB = PC = 2,$$

正三棱锥 $P-ABC$ 的外接球, 就是以 PA 为棱长的正方体的外接球, 故球的半径为

$$R = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{球 } O \text{ 的表面积 } S = 4\pi R^2 = 12\pi,$$

故答案为: 12π .

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题

11. 2013年高考真题新课标卷II文科第15题 ★★

已知正四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，底面边长为 $\sqrt{3}$ ，则以 O 为球心， OA 为半径的球的表面积为 _____。

【答案】 24π

【解析】过 O 作底面 $ABCD$ 的垂线段 OE ，则 E 为正方形 $ABCD$ 的中心。由题意可知

$\frac{1}{3} \times (\sqrt{3})^2 \times OE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $OE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，故球的半径 $R = OA = \sqrt{OE^2 + EA^2} = \sqrt{6}$ ，则球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 24\pi$ 。

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

12. 2017~2018学年广东广州越秀区广州市铁一中学高二下学期期末文科三校联考第16题5分 ★★

已知球 O 的半径为 R ， A, B, C 三点在球 O 的球面上，球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}R$ ， $AB = AC = 2$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，则球 O 的表面积为 _____。

【答案】 $\frac{64}{3}\pi$

【解析】设 O' 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心，则易证 $\triangle ABO'$ 是正三角形，

$$\therefore BO' = AB = 2,$$

设 O 为球 O 的球心，因 $OO' \perp$ 面 ABC ，

$$\therefore OO' = \frac{1}{2}R,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOO' \text{ 中, } BO'^2 + OO'^2 = BO^2,$$

$$\text{即: } 2^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2,$$

$$\text{解得: } R^2 = \frac{16}{3}.$$

$$\therefore 4\pi R^2 = \frac{64}{3}\pi.$$

【标注】【知识点】空间几何体的表面积；组合体求体积、表面积问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

3. 空间中的位置关系

13. 2020~2021学年四川成都高新区电子科技大学实验中学高二下学期期中理科第4题5分 ★★

已知 m, n 是两条不同直线， α, β, γ 是三个不同平面，下列命题中正确的是（ ）。

A. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel n$

B. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ ，则 $\alpha \parallel \beta$

C. 若 $m//\alpha$, $m//\beta$, 则 $\alpha//\beta$

D. 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $m//n$

【答案】 D

【解析】 A 选项: $m//\alpha$, $n//\alpha$ 时, m , n 可以平行, 可以相交, 也可以异面, 故 A 项错;

B 选项: $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$ 时, α , β 可以平行, 也可以相交 (也可以参照教室的一角), 故 B 项错; β 可能相交, 可能平行, 故 B 错误;

C 选项: $m//\alpha$, $m//\beta$ 时, α , β 可以平行, 也可以相交, 如 m 平行于 α , β 的交线时, α , β 便相交, 故 C 项错;

D 选项: 当 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$ 时, 根据直线与平面垂直的性质定理知 $m//n$, 故 D 项正确.
故选 D.

【标注】 【知识点】 已知线面位置关系判定结论的问题

14. 2020~2021学年北京海淀区中国人民大学附属中学高二上学期期中第3题5分 ★★

设 m 是一条直线, α 、 β 是两个不同的平面, 则下列命题一定正确的是 ().

A. 若 $\alpha\perp\beta$, $m\perp\alpha$, 则 $m//\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$, $m//\alpha$, 则 $m\perp\beta$

C. 若 $\alpha//\beta$, $m\perp\alpha$, 则 $m\perp\beta$

D. 若 $\alpha//\beta$, $m//\alpha$, 则 $m//\beta$

【答案】 C

【解析】 A 选项: $\alpha\perp\beta$, $m\perp\alpha$, 则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$, $\therefore$

A 错误;

B 选项: m 与 β 的关系不确定, $\therefore$ B 错误;

C 选项: C 正确;

D 选项: $\alpha//\beta$, $m//\alpha$, 则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$,

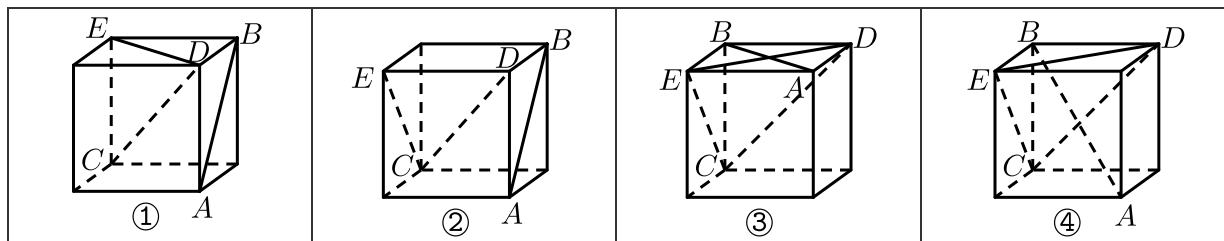
$\therefore$ D 错误.

故选 C.

【标注】 【知识点】 点、直线、平面之间的位置关系; 已知线面位置关系判定结论的问题

15. 2019~2020学年天津东丽区天津一中滨海学校高一下学期期中第6题5分 ★★

如图, 在以下四个正方体中, 直线 AB 与平面 CDE 垂直的是 ().



A. ①②

B. ②④

C. ①③

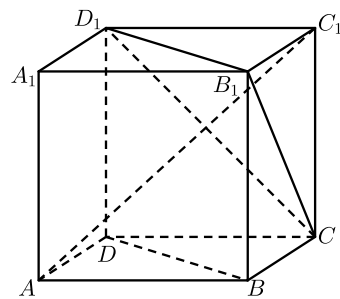
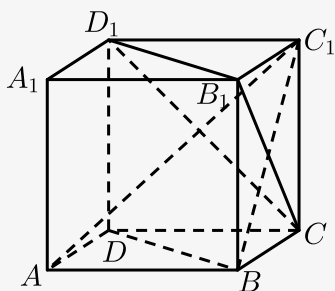
D. ②③

【答案】 B**【解析】** 对于①，由 AB 与 CE 所成角为 45° ，可得直线 AB 与平面 CDE 不垂直；对于②，由 $AB \perp CE$ ， $AB \perp ED$ ，且 $CE \cap ED = E$ ，可得 $AB \perp$ 平面 CDE ；对于③，由 AB 与 CE 所成角为 60° ，可得直线 AB 与平面 CDE 不垂直；对于④，由 $ED \perp$ 平面 ABC ，可得 $ED \perp AB$ ，同理： $EC \perp AB$ ，可得 $AB \perp$ 平面 CDE 。

故选 B。

【标注】 【知识点】线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定

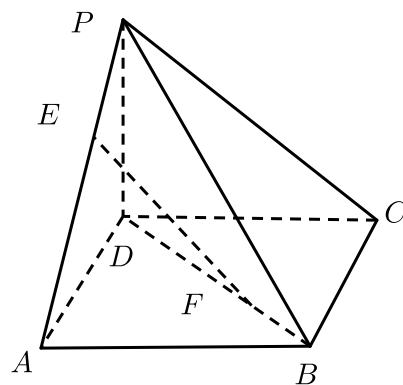
16. 2017~2018学年河北唐山滦南县高二下学期期末理科第3题5分 ★★★

如图， $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是（ ）。A. $BD \parallel$ 平面 CB_1D_1 B. $AC_1 \perp BD$ C. $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 D. 异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 60° **【答案】** D**【解析】** A选项， $\because BD \parallel B_1D_1$ ， $\therefore BD \parallel$ 平面 CB_1D_1 ，故 A 项正确；B选项，由正方体性质可得， $AC \perp BD$ ，而 AC 是 AC_1 在底面 $ABCD$ 内的射影，由三垂线定理知 $AC_1 \perp BD$ ，故 B 项正确；C选项，由三垂线定理可得 $AC_1 \perp B_1C$ ， $AC_1 \perp B_1D_1$ ， $\therefore AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 ，故 C 项正确；D选项， $\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle BCB_1$ 即是 AD 与 CB_1 所成角，显然 $\angle BCB_1 = 45^\circ$ ，故 D 项错误。

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；直线和平面垂直的性质；线线垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；几何法求空间角

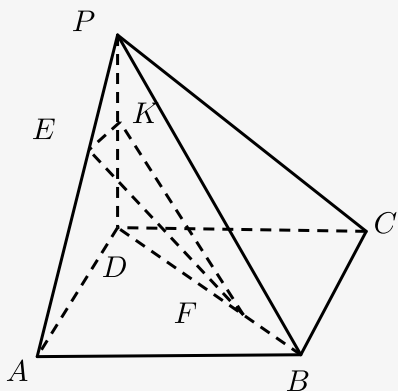
17. 2019~2020学年4月天津和平区天津市第一中学高一下学期周测D卷第19题 ★★

如图所示， P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点， E 、 F 分别在 PA 、 BD 上，且 $PE:EA=BF:FD$ ，求证： $EF\parallel$ 平面 PBC 。



【答案】证明见解析。

【解析】过 E 作 $EK\parallel AD$ 交 PD 于 K ，连结 KF 。



$$\therefore EK\parallel AD,$$

$$\therefore EK\parallel BC. \text{ ①}$$

$$\therefore \frac{PK}{KD} = \frac{PE}{EA},$$

$$\text{又} \because \frac{PE}{EA} = \frac{BF}{FD},$$

$$\therefore \frac{PK}{KD} = \frac{BF}{FD},$$

$$\therefore KF\parallel PB, \text{ ②}$$

由①，②知，

$$\text{又} \because EK \cap KF = K,$$

$$\therefore \text{平面 } EFK \parallel \text{平面 } PBC,$$

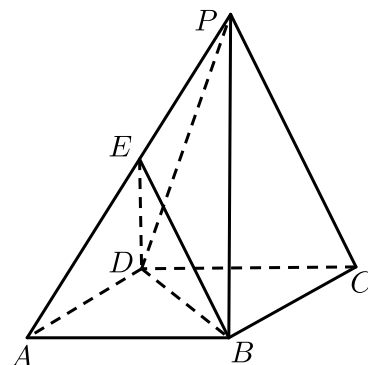
$$\text{又} \because EF \subset \text{平面 } EFK,$$

$$\therefore EF \parallel \text{平面 } PBC.$$

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

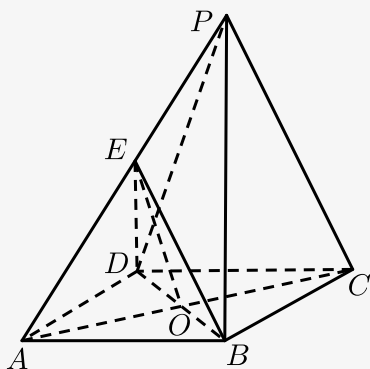
18. ★★

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形， E 为 PA 的中点，求证： $PC \parallel$ 平面 EDB 。



【答案】证明见解析。

【解析】连接 AC ， AC 与 BD 交于点 O ，连接 EO ，



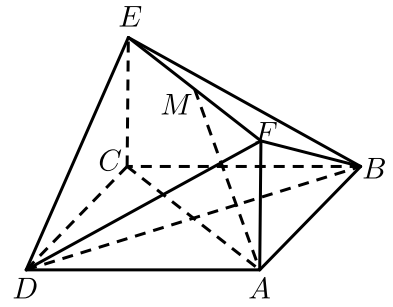
$\because ABCD$ 为平行四边形，
 $\therefore O$ 为 AC 中点，
又 $\because E$ 为 AP 中点，
 $\therefore EO$ 为 $\triangle APC$ ， PC 边上的中位线，
 $\therefore EO \parallel PC$ ，
 $\therefore PC \parallel$ 面 EDB 。

【标注】【知识点】直线和平面平行的判定；线面平行的证明问题

19. 2019~2020学年12月陕西咸阳秦都区咸阳彩虹中学高一上学期月考第17题10分 ★★

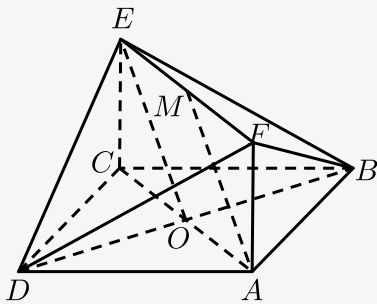
如图，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $ACEF$ 是矩形， M 是线段 EF 的中点。

求证： $AM \parallel$ 平面 BDE 。



【答案】证明见解析．

【解析】如图，记 AC 与 BD 的交点为 O ，连接 OE ．



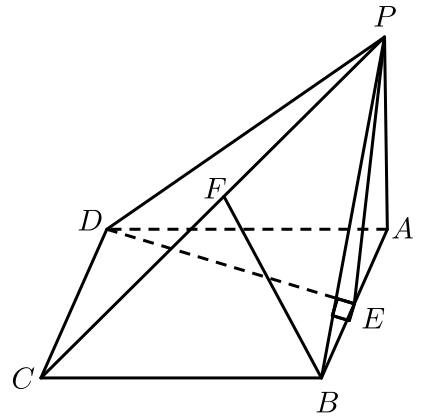
因为 O, M 分别是 AC, EF 的中点，四边形 $ACEF$ 是矩形，
 所以四边形 $AOEM$ 是平行四边形，
 所以 $AM \parallel OE$ ．
 又因为 $OE \subset$ 平面 BDE ， $AM \not\subset$ 平面 BDE ，
 所以 $AM \parallel$ 平面 BDE ．

【标注】【知识点】线面平行的证明问题；直线和平面平行的判定

20. ★★

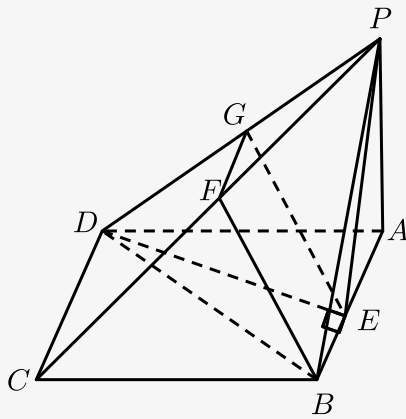
如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 AB 的中点， F 是 PC 的中点．

求证： $BF \parallel$ 平面 PDE ．



【答案】 证明见解析 .

【解析】 取 PD 的中点 G , 连接 FG , GE ,



$\because F, G$ 是中点 ,

$\therefore FG \parallel CD$, 且 $FG = \frac{1}{2}CD$.

又 $\because BE \parallel CD$, 且 $BE = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore FG \parallel BE$,

$\therefore$ 四边形 $BEGF$ 是平行四边形 ,

$\therefore BF \parallel GE$.

又 $\because GE \subset$ 平面 PDE , $BF \not\subset$ 平面 PDE ,

$\therefore BF \parallel$ 平面 PDE .

【标注】 【知识点】 直线和平面平行的判定 ; 线面平行的证明问题

21. ★★

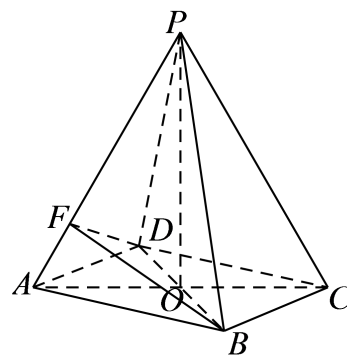
底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$, 点 E 在 PD 上 , 且 $PE:ED = 2:1$, 在棱 PC 上是否存在一点 F , 使得 $BF \parallel$ 平面 AEC ?

又因为 $BC \parallel AD$, 所以 $PD \perp BC$,
 又 $PD \perp PB$, $PB \cap BC = B$, 所以 $PD \perp$ 平面 PBC .

【标注】【知识点】直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的性质；几何法求空间角；垂直的探索性问题；点、直线、平面之间的位置关系

23. 2018~2019学年北京东城区北京市第五中学高二上学期期中第19题 ★★★

如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ， $\triangle PAC$ 是边长为 2 的等边三角形， $PB = PD = \sqrt{6}$ ， $AP = 4AF$.



求证： $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

【解析】 (1) 因为底面 $ABCD$ 是菱形， $AC \cap BD = O$ ，
 所以 O 为 AC, BD 中点 .
 又因为 $PA = PC, PB = PD$ ，
 所以 $PO \perp AC, PO \perp BD$ ，
 所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决空间中的平行问题；线面垂直的证明问题；直线和平面垂直的判定