

04数列综合习题

1. 数列分奇偶

1. 2018年天津高三一模理科十二校联考第18题13分 ★★★★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_4 - a_2 = 12$, $S_4 + 2S_2 = 3S_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $b_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, T_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 , 求 T_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = 2^n$, $b_n = n^2$.

(2) $T_{2n} = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}} + \frac{n}{2n+1}$.

【解析】 (1) $\{a_n\}$ 为等比数列 , 设公比为 q , 首项为 a_1 .

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} a_1 q^3 - a_1 q = 12 \\ a_1(1+q+q^2+q^3) + 2a_1(1+q) = 3a_1(1+q+q^2) \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2^n .$$

$$\text{又} \because nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) ,$$

$$\therefore \left\{ \frac{b_n}{n} \right\} \text{ 为首项为 } \frac{b_1}{1} = 1 , \text{ 公差为 } 1 \text{ 得等差数列} .$$

$$\therefore \frac{b_n}{n} = n , \therefore b_n = n^2 .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } c_n = \begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases} ,$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{1}{n(n+2)}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^{n-1}}, n \text{ 为偶数} \end{cases} ,$$

$$\therefore T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}} \right)$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \left(\frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}} \right)$$

$$\text{设 } A = \frac{2}{2^1} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^5} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n-1}} ,$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}A = \frac{2}{2^3} + \frac{4}{2^5} + \frac{6}{2^7} + \cdots + \frac{2n}{2^{2n+1}} ,$$

$$\text{两式相减得 } \frac{3}{4}A = 1 + 2 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} \right) - \frac{2n}{2^{2n+1}} ,$$

$$\text{整理得 } A = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}} ,$$

$$\therefore T_{2n} = \frac{16}{9} - \frac{6n+8}{9 \times 2^{2n-1}} + \frac{n}{2n+1}.$$

【标注】【知识点】构造等差数列求通项；裂项相消法求和；错位相减法求和

2. 2016年天津河西区高三一模理科第18题13分 ★★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，满足 $a_1 = 3$ ， $b_1 = 1$ ， $b_2 + S_2 = 10$ ， $a_5 - 2b_2 = a_3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式。

(2) 令 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & (n \text{ 为奇数}) \\ b_n, & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$ ，设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求 T_n 。

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$ ， $b_n = 2^{n-1}$ 。

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = \frac{2^n - 2}{3} + \frac{n+1}{n+2},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} + \frac{n}{n+1}.$$

【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

则由 $a_1 = 3$ ， $b_1 = 1$ ， $b_2 + S_2 = 10$ ， $a_5 - 2b_2 = a_3$ ，

$$\text{得 } \begin{cases} q + 3 + 3 + d = 10 \\ a_1 + 4d - 2q = 3 + 2d \end{cases}, \text{ 解得 } d = 2, q = 2,$$

$$\therefore a_n = 2n + 1, b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由 (1) 可得， $S_n = n(n+2)$ ，

$$\text{则 } c_n = \begin{cases} \frac{2}{n(n+2)}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \text{ 即 } c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

当 n 为奇数时，

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + (2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{2(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 4} \\ &= \frac{2^n - 2}{3} + \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

当 n 为偶数时，

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + (2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{2(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1 - 4} \\ &= \frac{2^{n+1} - 2}{3} + \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和；裂项相消法求和

3. 2016年天津河北区高三一模理科第18题13分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_{10} = 19$, $S_{10} = 100$, 数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = a_n + 2$ 成立.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = (-1)^n \frac{4n \cdot b_n}{(2n+1)^2}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$; $b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) T_n = \begin{cases} -\frac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【解析】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } a_{10} = a_1 + 9d = 19, S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} \times d = 100,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 2, \text{ 所以 } a_n = 2n - 1,$$

$$\text{所以 } b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 2n + 1 \text{ ①},$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 = 3,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} = 2n - 1 \text{ ②},$$

$$\text{①②两式相除得 } b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{因为当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 = 3 \text{ 适合上式, 所以 } b_n = \frac{2n+1}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(2) \text{ 由已知 } c_n = (-1)^n \frac{4n \cdot b_n}{(2n+1)^2},$$

$$\text{得 } c_n = (-1)^n \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{则 } T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

当 n 为偶数时,

$$T_n = -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$= -\frac{2n}{2n+1},$$

当 n 为奇数时,

$$T_n = -\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \left(-1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{2n+1}$$

$$= -\frac{2n+2}{2n+1}.$$

$$\text{综上: } T_n = \begin{cases} -\frac{2n}{2n+1}, n \text{ 为偶数} \\ -\frac{2n+2}{2n+1}, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

4. 2017~2018学年5月广东广州荔湾区广州市真光中学高一下学期月考理科第19题12分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = n - n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \begin{cases} 2^{a_n}, (n = 2k - 1) \\ \frac{2}{(1-a_n)(1-a_{n+2})}, (n = 2k) \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【答案】(1) $a_n = 1 - n$.

$$(2) \frac{11}{6} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2n+2} .$$

【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = n - n^2 - [(n-1) - (n-1)^2] = 2 - 2n$,

即: $a_n = 1 - n (n \geq 2)$,

当 $n = 1$ 时, 由 $2S_1 = 1 - 1^2$ 得 $a_1 = 0$,

显然当 $n = 1$ 时上式也适合 ,

$\therefore a_n = 1 - n$.

$$(2) \because \frac{2}{(1-a_n)(1-a_{n+2})} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} ,$$

$$\therefore T_{2n} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$$

$$= (2^0 + 2^{-2} + \cdots + 2^{2-2n}) + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \right]$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{11}{6} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2n+2} .$$

【标注】【方法】裂项相消法

【知识点】分组法求和; 裂项相消法求和

5. 2014年浙江宁波高三二模理科第19题14分 ★★★

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 8$, $S_4 = 40$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且

$$T_n - 2b_n + 3 = 0, n \in \mathbf{N}^* .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

【答案】(1) $a_n = 4n$, $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

$$(2) P_n = \begin{cases} 2^{n+1} + n^2 - 2, n \text{ 为偶数} \\ 2^n + n^2 + 2n - 1, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 4a_1 + 6d = 40 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = 4n,$$

$$\therefore T_n - 2b_n + 3 = 0,$$

$$\therefore \text{当 } n=1 \text{ 时, } b_1 = 3, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } T_{n-1} - 2b_{n-1} + 3 = 0,$$

$$\text{两式相减, 得 } b_n = 2b_{n-1}, (n \geq 2),$$

则数列 $\{b_n\}$ 为等比数列,

$$\therefore b_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) c_n = \begin{cases} 4n, n \text{ 为奇数} \\ 3 \cdot 2^{n-1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_n)$$

$$= \frac{(4 + 4n - 4) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{6(1 - 4^{\frac{n}{2}})}{1 - 4}$$

$$= 2^{n+1} + n^2 - 2.$$

当 n 为奇数时,

$$n=1 \text{ 时, } P_1 = c_1 = a_1 = 4,$$

(法一) $n-1$ 为偶数,

$$P_n = P_{n-1} + c_n = 2^{(n-1)+1} + (n-1)^2 - 2 + 4n = 2^n + n^2 + 2n - 1,$$

$$(法二) P_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_n) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-1})$$

$$= \frac{(4 + 4n) \cdot \frac{n+1}{2}}{2} + \frac{6(1 - 4^{\frac{n-1}{2}})}{1 - 4}$$

$$= 2^n + n^2 + 2n - 1.$$

$$\therefore P_n = \begin{cases} 2^{n+1} + n^2 - 2, n \text{ 为偶数} \\ 2^n + n^2 + 2n - 1, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】分组法求和

6. 2019~2020学年天津宝坻区高三上学期期中第20题16分 ★★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n , 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$.

$$(2) T_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, n = 2k \\ \frac{2n+2}{2n+1}, n = 2k+1 \end{cases}.$$

【解析】(1) $d = 2, S_1 = a_1, S_2 = 2a_1 + d, S_4 = 4a_1 + 6d$.

$\therefore S_1, S_2, S_4$ 成等比数列,

$$\therefore S_2^2 = S_1 S_4,$$

解得 $a_1 = 1, \therefore a_n = 2n - 1$.

$$(2) b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right),$$

当 n 为偶数时,

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\text{所以 } T_n = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1};$$

当 n 为奇数时,

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\text{所以 } T_n = 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, & n = 2k \\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；等差数列求通项问题

7. (10分) 2017~2018学年山东潍坊高三上学期期末理科第17题12分 ★★★

若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - \lambda (\lambda > 0, n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) (5分) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 并求 a_n .

(2) (5分) 若 $\lambda = 4$, $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ \log_2 a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【答案】(1) 证明见解析, $a_n = \lambda \cdot 2^{n-1}$.

$$(2) T_{2n} = \frac{4^{n+1}}{3} + n^2 + 2n - \frac{4}{3}.$$

【解析】(1) $\because S_n = 2a_n - \lambda$,

当 $n = 1$ 时, 得 $a_1 = \lambda$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - \lambda$,

$$\therefore S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1},$$

$$\text{即 } a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-1},$$

$$\therefore a_n = 2a_{n-1},$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 λ 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = \lambda \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) \because \lambda = 4,$$

$$\therefore a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1},$$

$$\therefore b_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \text{ 为奇数,} \\ n+1, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\therefore T_{2n} = 2^2 + 3 + 2^4 + 5 + 2^6 + 7 + \cdots + 2^{2n} + 2n + 1$$

$$= (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n}) + (3 + 5 + \cdots + 2n + 1)$$

$$= \frac{4 - 4^{n+1}}{1 - 4} + \frac{n(3 + 2n + 1)}{2}$$

$$= \frac{4^{n+1} - 4}{3} + n(n + 2).$$

$$\therefore T_{2n} = \frac{4^{n+1}}{3} + n^2 + 2n - \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；分组法求和

2. 数列与不等式综合

8. 2018~2019学年6月重庆九龙坡区重庆外国语学校高一下学期月考第22题12分 ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, $a_1 = 1$, $\frac{a_n + 1}{a_{n+1} + 1} = \frac{a_{n+1}}{3a_n}$, $b_n = a_n^2 + a_n$.

(1) 求证数列 $\{b_n\}$ 为等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 求证: $\frac{1}{(1+a_1)a_2} + \frac{1}{(1+a_2)a_3} + \cdots + \frac{1}{(1+a_n)a_{n+1}} < \frac{1}{2}$.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) a_n = \frac{\sqrt{8 \cdot 3^{n-1}} + 1 - 1}{2}.$$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 求证数列 $\{b_n\}$ 为等比数列.

$$\begin{aligned} \frac{a_n + 1}{a_{n+1} + 1} &= \frac{a_{n+1}}{3a_n} \Rightarrow 3(a_n^2 + a_n) \\ &= a_{n+1}^2 + a_{n+1}, \end{aligned}$$

所以 b_n 是以3为公比的等比数列.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$\begin{aligned} a_n^2 + a_n &= 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{\sqrt{8 \cdot 3^{n-1}} + 1 - 1}{2}. \end{aligned}$$

(3) 由通项可知, 数列 a_n 为单调递增数列, 所以

$$(1 + a_n)a_{n+1} > (1 + a_n)a_n$$

$$\begin{aligned}
&= b_n \Rightarrow \frac{1}{(1+a_n)a_{n+1}} < \frac{1}{b_n} \\
&= \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} (n \geq 2), \\
&\text{又因为 } a_1 = 1, a_2 = 2, \\
&\text{所以左式} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{n-2}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} \right) < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】数列单调性问题；放缩法证明数列不等式

9. 2019~2020学年11月重庆九龙坡区重庆市育才中学高三上学期周测D卷理科第17题12分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_{n+2} - a_n + \frac{1}{a_{n+2} \cdot a_n}$ ，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求证：

$$T_n < 2n + \frac{5}{12}.$$

【答案】(1) $a_n = n + 1$ 。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} - \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{3(n-1)}{2} = n + 1.$$

$n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 2$ 符合上式。

$$\therefore a_n = n + 1.$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad b_n &= a_{n+2} - a_n + \frac{1}{a_{n+2} \cdot a_n} \\
&= (n+3) - (n+1) + \frac{1}{(n+3)(n+1)} \\
&= 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\
&= 2n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= 2n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) < 2n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
&= 2n + \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

3. 数列放缩

10. 2019~2020学年12月山东菏泽牡丹区山东省菏泽第一中学高三上学期月考第17题10分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 其前 n 项的和为 S_n , 且当 $n \geq 2$ 时, 满足 $a_n = \frac{S_n^2}{S_n - 1}$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列.

(2) 证明: $S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 < \frac{7}{4}$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = \frac{S_n^2}{S_n - 1}$,

$$S_{n-1} - S_n = S_n S_{n-1}, \text{ 即 } \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 1,$$

从而 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 构成以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 方法一: 由 (1) 可知, $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times 1 = n$,

$$\therefore S_n = \frac{1}{n}.$$

则当 $n \geq 2$ 时,

$$S_n^2 = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

故当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 &< 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &< 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

又当 $n = 1$ 时, $S_1^2 = 1 < \frac{7}{4}$ 满足题意,

故 $S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 < \frac{7}{4}$.

方法二: 由 (1) 可知, $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1) \times 1 = n$,

$$\therefore S_n = \frac{1}{n}.$$

则当 $n \geq 2$ 时, $S_n^2 = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 &< 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

又当 $n = 1$ 时, $S_1^2 = 1 < \frac{7}{4}$, 满足题意,

故 $S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2 < \frac{7}{4}$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 等差数列的判定与证明问题

11. 2018~2019学年四川成都金牛区成都市实验外国语学校高一下学期期末第22题12分 ★★★★★

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n + \frac{1}{a_n} = 2S_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求证 : 数列 $\{S_n^2\}$ 是等差数列 .

(2) 记数列 $b_n = 2S_n^3$, $T_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$, 证明 : $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < T_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $a_n + \frac{1}{a_n} = 2S_n \Rightarrow S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}} = 2S_n (n \geq 2)$,

所以 $\frac{1}{S_n - S_{n-1}} = S_n + S_{n-1}$, 即 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$,

所以 $\{S_n^2\}$ 为等差数列 .

(2) 令 $n = 1$, 则由 , 可得 $a_1 + \frac{1}{a_1} = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 1$, 即 $S_1 = 1$, 由 $\{S_n^2\}$ 为等差数列可

得 : $S_n^2 = S_1^2 + (n-1) = n$,

所以 $S_n = \sqrt{n}$,

所以 $b_n = 2n\sqrt{n}$, 即 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$, 考虑先证 $T_n < \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n \cdot 2\sqrt{n}} < \frac{1}{n(\sqrt{n-1}) + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} < \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$$

, 当 $n \geq 2$ 时 ,

$$T_n < \frac{1}{b_1} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

, $n = 1$ 时 , $T_1 = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1$,

所以 $T_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$, 再证 $T_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n \cdot 2\sqrt{n}} > \frac{1}{n(\sqrt{n+1}) + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} > \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

,

$$T_n > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

综上所述 , $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < T_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

【标注】【知识点】数列与不等式综合 ; 裂项相消法求和 ; 数列的函数特性 ; 等差数列的判定与证明问题

12. 2014年广东深圳高三一模理科第19题14分 ★★★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $4(n+1)(S_n+1) = (n+2)^2 a_n (n \in \mathbf{N}^+)$.

(1) 求 a_1 , a_2 的值 .

(2) 求 a_n .

(3) 设 $b_n = \frac{n+1}{a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证 : $T_n < \frac{3}{4}$.

【答案】 (1) $a_1 = 8$, $a_2 = 27$.

(2) $a_n = (n+1)^3$.

(3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{3}{4}$.

【解析】 (1) 当 $n=1$ 时 , 有 $4 \times (1+1)(a_1+1) = (1+2)^2 a_1$, 解得 $a_1 = 8$.

当 $n=2$ 时 , 有 $4 \times (2+1)(a_1+a_2+1) = (2+2)^2 a_2$, 解得 $a_2 = 27$.

(2) 方法一 : 当 $n \geq 2$ 时 , 有 $4(S_n+1) = \frac{(n+2)^2 a_n}{n+1}$, ①

$$4(S_{n-1}+1) = \frac{(n+1)^2 a_{n-1}}{n} , \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得 : } 4a_n = \frac{(n+2)^2 a_n}{n+1} - \frac{(n+1)^2 a_{n-1}}{n} ,$$

$$\text{化为 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+1)^3}{n^3} ,$$

$\therefore$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{(n+1)^3}{n^3} \times \frac{n}{(n-1)^3} \times \cdots \times \frac{4^3}{3^3} \times \frac{3^3}{2^2} \times 2^3 \\ = (n+1)^3$$

,

又 : 当 $n=1$ 时 , 有 $a_1 = 8$, $\therefore a_n = (n+1)^3$.

方法二 : 根据 $a_1 = 8$, $a_2 = 27$, 猜想 : $a_n = (n+1)^3$.

用数学归纳法证明如下 :

(I) 当 $n=1$ 时 , 有 $a_1 = 8 = (1+1)^3$, 猜想成立 .

(II) 假设当 $n=k$ 时 , 猜想也成立 , 即 : $a_k = (k+1)^3$.

那么当 $n=k+1$ 时 , 有 $4(k+1+1)(S_{k+1}+1) = (k+1+2)^2 a_{k+1}$,

$$\text{即 : } 4(S_{k+1}+1) = \frac{(k+1+2)^2 a_{k+1}}{k+1+1} , \quad ①$$

$$\text{又 } 4(S_k+1) = \frac{(k+2)^2 a_k}{k+1} , \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得 : } 4a_{k+1} = \frac{(k+3)^2 a_{k+1}}{k+2} - \frac{(k+2)^2 a_k}{k+1} = \frac{(k+3)^2 a_{k+1}}{k+2} - \frac{(k+2)^2 (k+1)^3}{k+1}$$

,

$$\text{解得 } a_{k+1} = (k+2)^3 = (k+1+1)^3 ,$$

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时 , 猜想也成立 .

因此 , 由数学归纳法证得 $a_n = (n+1)^3$ 成立 .

$$(3) \because b_n = \frac{n+1}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

$$\begin{aligned}\therefore T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{3}{4} .\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题；裂项相消法求和