

04数列综合

1. 数列分奇偶

1. 2020~2021学年12月天津河西区天津市第四中学高三上学期月考第19题15分 ★★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 且满足 $a_1 + a_2 = 6a_3$, $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbf{N}^* .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}} \cdot a_{n+2}, n \text{ 为奇数} \\ a_nb_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*$; $b_n = n, n \in \mathbf{N}^*$.

$$(2) T_{2n} = \frac{25}{18} - \left[\frac{1}{4(2n+1)} + \frac{3n+4}{9} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} .$$

【解析】 (1) 因为 $a_1 + a_2 = 6a_3$, $a_4 = 4a_3^2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + a_1q = 6a_1q^2 \\ a_1q^3 = 4(a_1q^2)^2 \end{cases} ,$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1+q = 6q^2 \\ a_1q^3 = 4a_1^2q^4 \end{cases} , \text{ 即 } \begin{cases} 6q^2 - q - 1 = 0 \\ 4a_1q = 1 \end{cases} , \text{ 即 } \begin{cases} (3q+1)(2q-1) = 0 \\ a_1 = \frac{1}{4q} \end{cases} ,$$

$$\text{因为 } q > 0, \text{ 所以解得 } q = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_1 = \frac{1}{4 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}^* ,$$

$$\text{又因为数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{n(n+1)}{2} ,$$

$$\text{则当 } n=1 \text{ 时, } b_1 = S_1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1 ,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 + n - n^2 + n}{2} = n ,$$

所以当 $n=1$ 时, $b_1=1$ 也满足上式 ,

所以 $b_n = n, n \in \mathbf{N}^*$,

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*$,

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 因为 $c_n = \begin{cases} \frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}} \cdot a_{n+2}, n \text{ 为奇数} \\ a_nb_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 所以当 n 为奇数时 ,

$$c_n = \frac{3b_n+8}{b_nb_{n+2}} \cdot a_{n+2} = \frac{3n+8}{n(n+2)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{n \times 2^n} - \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+2}} ,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = a_nb_n = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ,$$

$$\text{令 } A = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}, B = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n} ,$$

$$\text{即 } A = c_1 + c_3 + \cdots + c_{2n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{5 \times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}},
\end{aligned}$$

$$\text{则 } B = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 B = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + (2n-2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

,

所以

$$\begin{aligned}
B - \frac{1}{4}B &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2n \\
&\times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}
\end{aligned}$$

,

$$\text{则 } \frac{3}{4}B = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^n \right]}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}$$

$$= \frac{2}{3} - \left(n + \frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

$$\text{所以 } B = \frac{8}{9} - \frac{3n+4}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

$$\text{所以 } T_{2n} = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n}$$

$$= (c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}) + (c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n})$$

$$= A + B$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1) \times 2^{2n+1}} - \frac{3n+4}{9} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \frac{8}{9}$$

$$= \frac{25}{18} - \left[\frac{1}{4(2n+1)} + \frac{3n+4}{9} \right] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

$$\text{故 } T_{2n} = \frac{25}{18} - \left[\frac{1}{4(2n+1)} + \frac{3n+4}{9} \right] \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；分组法求和；错位相减法求和

2. 2020~2021学年1月天津和平区天津市第一中学高三上学期月考第19题 ★★★★★

设 $\{a_n\}$ 是等比数列， $\{b_n\}$ 是递增的等差数列， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $a_1 = 2$ ， $b_1 = 1$ ，

$$S_4 = a_1 + a_3, \quad a_2 = b_1 + b_3.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $d_n = a_n + b_n$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 求满足 $T_n > 2^{n+1} + 1$ 成立的 n 的最小值.

(3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3b_n - 2)a_n}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

【答案】 (1) $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$; $b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 3.

(3) $\left(\frac{6n-5}{9} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2^{2n+1} - \frac{8}{9}$.

【解析】 (1) 由题知 $S_4 = \frac{b_1 + b_4}{2} \times 4 = 2(1 + b_4)$,

$$\therefore 2(1 + b_4) = 2 + a_3,$$

$$\therefore a_2 = 1 + b_3,$$

$$\therefore \begin{cases} 2(1 + b_1 + 3d) = 2 + a_1 q^2 \\ a_1 q = 1 + b_1 + 2d \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2 + 3d = 1 + q^2 \\ q = 1 + d \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} d = 0 \\ q = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d = 1 \\ q = 2 \end{cases},$$

$\therefore \{b_n\}$ 递增,

$$\therefore d = 1, q = 2,$$

$$\therefore a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$b_n = n (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) $d_n = a_n + b_n = n + 2^n$,

$$\therefore T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n),$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{(1+n)n}{2} = 2^{n-1} + \frac{n^2+n}{2} - 2,$$

$$\text{若 } T_n > 2^{n+1} + 1 \text{ 则 } \frac{n^2+n}{2} > 3 \text{ 即 } n^2 + n - 6 > 0,$$

$$\therefore (n+3)(n-2) > 0, \text{ 即 } n < -3 \text{ 或 } n > 2,$$

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore n \geq 3,$$

故 n 的最小值为 3.

(3) 记 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项奇数项和为 A , 偶数项和为 B ,

$$\text{故 } A = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$$

$$= a_1 b_1 + a_3 b_3 + a_5 b_5 + \cdots + a_{2n-1} b_{2n-1}$$

$$= 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^5 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{2n-1},$$

$$\therefore 4A = 1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^5 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{2n-1} + (2n-1) \cdot 2^{2n+1},$$

$$\therefore A - 4A = 2 + 2(2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n-1}) - (2n-1) \cdot 2^{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \frac{2 \cdot 8(1 - 4^{n-1})}{1 - 4} - (2n - 1) \cdot 2^{2n+1} \\
&= \left(\frac{5}{3} - 2n\right) \cdot 2^{2n+1} - \frac{10}{3}, \\
\therefore A &= \frac{6n - 5}{9} \cdot 2^{2n+1} + \frac{10}{9}.
\end{aligned}$$

n 为偶数时,

$$c_n = \frac{(3n - 2) \cdot 2^n}{n(n + 2)} = 2^{n+2} \cdot \frac{3n - 2}{4n(n + 2)} = 2^{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n + 2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{2^{n+2}}{n + 2} - \frac{2^n}{n},$$

$$\therefore B = c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n-2} + c_{2n}$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2}\right) + \left(\frac{2^6}{6} - \frac{2^4}{4}\right) + \left(\frac{2^8}{8} - \frac{2^6}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{2^{2n}}{2n} - \frac{2^{2n-2}}{2n-2}\right)$$

$$+ \left(\frac{2^{2n+2}}{2n+2} - \frac{2^{2n}}{2n}\right)$$

$$= \frac{2^{2n+2}}{2n+2} - \frac{2^2}{2} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} - 2,$$

$$\therefore A + B = \frac{6n - 5}{9} \cdot 2^{2n+1} + \frac{10}{9} + \frac{2^{2n+1}}{n+1} - 2 = \left(\frac{6n - 5}{9} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2^{2n+1} - \frac{8}{9},$$

$$\text{即数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和为 } \left(\frac{6n - 5}{9} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot 2^{2n+1} - \frac{8}{9}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；裂项相消法求和；分组法求和

3. 2021年天津河北区高三一模第18题15分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列， $b_n > 0$ ，若 $a_1 = 3$ ， $b_1 = 1$ ， $b_3 + S_2 = 12$ ， $a_5 - 2b_2 = a_3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和。

(3) 若 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和。

【答案】 (1) $a_n = 2n + 1$ ， $b_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) $P_n = (2n - 1) \cdot 2^n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(3) $T_{2n} = \frac{2^{2n+1} + 1}{3} - \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

$$\therefore a_1 = 3, b_1 = 1, b_3 + S_2 = 12, a_5 - 2b_2 = a_3,$$

$$\therefore \begin{cases} q^2 + 3 + 3 + d = 12 \\ 3 + 4d - 2q = 3 + 2d \end{cases}$$

$$\therefore d = 2, q = 2 \text{ 或 } d = q = -3 \text{ (舍)},$$

$$\therefore a_n = 2n + 1, b_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)。$$

(2) 由 (1) 可知 $a_n = 2n + 1$ ， $b_n = 2^{n-1}$ ，

$$\text{所以 } a_n \cdot b_n = (2n + 1) \cdot 2^{n-1},$$

令数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 P_n ，

$$\text{则 } P_n = 3 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \cdots + (2n+1) \times 2^{n-1},$$

$$\text{则 } 2P_n = 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n-1} + (2n+1) \times 2^n,$$

$$\text{则 } P_n - 2P_n = 3 + 2 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{n-1} - (2n+1) \times 2^n,$$

$$-P_n = 3 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (2n+1) \times 2^n$$

$$= 3 + \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n+1) \times 2^n$$

$$= 3 + 4(2^{n-1} - 1) - (2n+1) \times 2^n$$

$$= 3 + 2 \times 2^n - 4 - (2n+1) \times 2^n$$

$$= (1-2n) \times 2^n - 1$$

$$\text{所以 } P_n = (2n-1) \times 2^n + 1,$$

$$\text{所以数列 } \{a_n \cdot b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } P_n = (2n-1) \cdot 2^n + 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$(3) \text{ 由 (1) 可知 } a_n = 2n+1, a_1 = 3, b_n = 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2n+1+3)}{2} = \frac{n(2n+4)}{2} = n(n+2),$$

$$\text{所以 } \frac{2}{S_n} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2},$$

$$\text{所以 } c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases},$$

$$\text{令数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和为 } T_{2n},$$

$$\text{则 } T_{2n} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + (2^1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n-1})$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} + \frac{2(1-4^n)}{1-4}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} + \frac{2(4^n-1)}{3}$$

$$= \frac{2^{2n+1}-2}{3} - \frac{1}{2n+1} + 1$$

$$= \frac{2^{2n+1}+1}{3} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和为 } T_{2n} = \frac{2^{2n+1}+1}{3} - \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；错位相减法求和；分组法求和；利用方程组求等比数列

4. 2020~2021学年11月天津河东区天津市第四十五中学高三上学期月考第19题 ★★★★★

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ， $b_5 = 4(b_4 - b_3)$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求 $\{T_n\}$ 的前 n 项和 Q_n 。

(3) 对任意的正整数 n ，设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，

求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} 。

【答案】 (1) $a_n = n$ ； $b_n = 2^{n-1}$ 。

$$(2) 2^{n+1} - n - 2.$$

$$(3) \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}.$$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

由 $a_1 = 1$ ， $a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ，则 $1 + 4d = 5d$ ，可得 $d = 1$ ，

$$\therefore a_n = 1 + n - 1 = n,$$

$$\because b_1 = 1, b_5 = 4(b_4 - b_3),$$

$$\therefore q^4 = 4(q^3 - q^2),$$

解得 $q = 2$ ，

$$\therefore b_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2}$$

$$= 2^n - 1,$$

$$\therefore Q_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n = (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) - n$$

$$= \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - n$$

$$= 2^{n+1} - n - 2.$$

$$(3) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}} = \frac{(3n - 2)2^{n-1}}{n(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^{n-1}}{n},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}} = \frac{n-1}{2^n},$$

$$\text{对任意的正整数 } n, \text{ 有 } \sum_{k=1}^n c_{2k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^{2k}}{2k+1} - \frac{2^{2k-2}}{2k-1} \right) = \frac{2^{2n}}{2n+1} - 1,$$

$$\text{和 } \sum_{k=1}^n c_{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \cdots + \frac{2n-1}{4^n}, \quad ①$$

$$\text{由 } ① \times \frac{1}{4} \text{ 可得 } \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{2n-3}{4^n} + \frac{2n-1}{4^{n+1}}, \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得 } \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \cdots + \frac{2}{4^n} = \frac{2n-1}{4^{n+1}},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{5}{9} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n},$$

$$\text{因此 } \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n c_{2k-1} + \sum_{k=1}^n c_{2k} = \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}.$$

$$\text{数列 } \{c_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和 } \frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}.$$

【标注】【知识点】分组法求和；错位相减法求和；分段数列问题

5. 2020~2021学年天津高三上学期期中（部分区）第20题16分 ★★

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列且公比大于 0， $a_1 = 1$ ， $b_1 = 2$ ， $2a_3 = 5(a_5 - a_4)$ ，

$$2b_3 = b_5 - b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{4n}{a_n \cdot a_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$ ，记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n .

【答案】(1) $a_n = 2n - 1$; $b_n = 2^n$.

$$(2) S_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2n+2}{2n+1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}.$$

【解析】(1) 设公差为 d 的数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

公比为 q 的数列 $\{b_n\}$ 为等比数列且公比大于 0,

$$a_1 = 1, b_1 = 2, 2a_3 = 5(a_5 - a_4), 2b_3 = b_5 - b_4.$$

所以 $2(a_1 + 2d) = 5d$, 解得 $d = 2$.

$$\text{所以 } a_n = 2n - 1.$$

$$\text{由于 } 2b_3 = b_5 - b_4,$$

$$\text{所以 } q^2 - q - 2 = 0,$$

解得 $q = 2$.

$$\text{所以 } b_n = 2^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得: } c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{4n}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{b} \right) \\ = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^n, \\ \text{记 } T_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right), P_n = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^i,$$

$$\text{则 } S_n = T_n + P_n,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = \left(1 + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ = 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = \left(1 + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ = 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

$$P_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2} \right)^n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n,$$

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{3} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{2n+2}{2n+1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题;裂项相消法求和;等差数列求通项问题

6. 2021年天津南开区天津市南开中学高三下学期高考模拟(5月)第19题15分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 证明数列 $\left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = \frac{(-1)^{n-1} 4(n+1)}{(3 + 2\log_2 a_n)(3 + 2\log_2 a_{n+1})}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

(3)

若 $d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n}$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 D_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $D_n \leq nS_n - a$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) 证明见解析, $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n^2$.

$$(2) T_{2n} = \frac{4n}{4n+3}.$$

$$(3) (-\infty, 0].$$

【解析】 (1) $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1),$$

$$\text{化为: } a_n = 2a_{n-1},$$

$$n = 1 \text{ 时, } a_1 = 2a_1 - 1, \text{ 解得 } a_1 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比为 2,

$$\therefore a_n = 2^{n-1},$$

数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{化为: } \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = 1, \text{ 且 } b_1 = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 公差为 1, 首项为 $\frac{b_1}{1} = 1$,

$$\therefore \frac{b_n}{n} = 1 + n - 1 = n, \quad b_n = n^2.$$

$$(2) c_n = (-1)^{n-1} \frac{4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right),$$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和:

$$T_{2n} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) + \cdots - \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3}$$

$$= \frac{4n}{4n+3}.$$

$$(3) d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n} = n \cdot 2^{n-1},$$

数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为:

$$D_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1},$$

$$2D_n = 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n,$$

$$\therefore -D_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} - n \cdot 2^n.$$

$$\text{解得 } D_n = (n-1) \cdot 2^n + 1,$$

$$S_n = 2a_n - 1 = 2^n - 1.$$

对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $D_n \leq nS_n - a$,

$$\therefore a \leq n(2^n - 1) - (n-1) \cdot 2^n - 1 = 2^n - n - 1,$$

$$\text{令 } d_n = 2^n - n - 1,$$

则 $d_{n+1} - d_n = 2^{n+1} - (n+1) - 1 - (2^n - n - 1)$
 $= 2^n - 1 > 0$,
 $\therefore$ 数列 $\{d_n\}$ 单调递增 ,
 $\therefore a \leq (d_n)_{\min} = d_1 = 0$,
 $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

【标注】【知识点】数列中的恒成立问题；构造等差数列求通项；数列单调性问题

7. 2020~2021学年天津宝坻区宝坻区第一中学高三上学期期中（八校联考）第19题16分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 8$, 设 $b_n = a_n - 2$.

(1) 证明： $\{b_n\}$ 是等比数列 .

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \geq T_n$ 恒成立, 求 λ 的取值范围 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1} , \lambda \geq -\frac{2}{9} .$$

【解析】 (1) $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 8$,

当 $n = 1$ 时 , $a_1 = S_1 = a_2 - 6$, $a_2 = 14$,

当 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时 , $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $S_{n-1} = a_n + 2n - 10$,

相减可得 $a_{n+1} = 2a_n - 2$,

即 $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$, 即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 (n \geq 2)$,

$$\text{又 } \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 2}{a_1 - 2} = 2 ,$$

可得 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 6$, 公比为 2 的等比数列 .

(2) 由 (1) 知 $a_n - 2 = 6 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n = 3 \cdot 2^n + 2$,

$$\text{所以 } c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$$

$$= (-1)^n \frac{3 \cdot 2^n + 2}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right] ,$$

$$T_n = -\left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1}\right) - \left(\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^4+1}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) ,$$

$$\therefore T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1} ,$$

当 n 为偶数时 , $T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ 是递减的 ,

此时当 $n = 2$ 时 , T_n 取最大值 $-\frac{2}{9}$, 则 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$,

当 n 为奇数时, $T_n = -\frac{1}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ 是递增的,
 此时 $T_n < -\frac{1}{3}$, 则 $\lambda \geq -\frac{1}{3}$.
 综上, λ 的取值范围是 $\lambda \geq -\frac{2}{9}$.

【标注】【知识点】数列中的恒成立问题;裂项相消法求和;消去 S_n 构造 a_n 递推关系

8. 2021年天津红桥区高三一模第19题15分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n$, $n \geq 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1, a_2, a_3 .

(2) 求证: 数列 $\left\{a_n + \frac{2}{3} \cdot (-1)^n\right\}$ 是等比数列.

(3) 求数列 $\{(6n-3) \cdot a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2$.

(2) 证明见解析.

(3) $T_n = \begin{cases} 3 + (2n-3) \cdot 2^n - 2n, & n \text{ 为偶数} \\ 3 + (2n-3) \cdot 2^n + 2n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$.

【解析】 (1) 因为 $S_n = 2a_n + (-1)^n$, $n \geq 1$,

所以当 $n=1$ 时, 有 $S_1 = a_1 = 2a_1 + (-1)^1 = 2a_1 - 1$,

即 $a_1 = 1$.

当 $n=2$ 时, 有 $S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 + (-1)^2 = 2a_2 + 1$,

即 $a_1 = a_2 + 1$, 则 $a_2 = 0$,

当 $n=3$ 时, 有 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3 + (-1)^3 = 2a_3 - 1$,

即 $a_1 + a_2 = a_3 - 1$, 即 $a_3 = 2$,

所以 $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2$.

(2) 因为 $S_n = 2a_n + (-1)^n$, $n \geq 1$,

则 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + (-1)^n - 2a_{n-1} - (-1)^{n-1}$, $n \geq 2$,

即 $a_n = 2a_{n-1} + 2(-1)^{n-1}$, $n \geq 2$,

则 $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = 2 \left[a_{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1} \right]$, $n \geq 2$,

由(1)可知 $a_1 = 1$,

所以 $a_1 + \frac{2}{3} \times (-1)^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

所以数列 $\left\{a_n + \frac{2}{3}(-1)^n\right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

(3) 由(2)知 $a_n + \frac{2}{3}(-1)^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$,

$\therefore a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{2}{3}(-1)^n$,

$\therefore (6n-3) \cdot a_n = (2n-1) [2^{n-1} - 2(-1)^n]$

$$= (2n-1) \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot (-1)^n \cdot (2n-1),$$

当 n 为偶数时,

$$T_n = [1 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}] \\ - 2[-1 + 3 - 5 + \cdots - (2n-3) + (2n-1)]$$

,

$$\text{令 } A_n = 1 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-2} + (2n-1) \cdot 2^{n-1} \text{ ①},$$

$$\text{则 } 2A_n = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n \text{ ②},$$

$$\text{则 ①} - \text{②} \text{ 得 } -A_n = 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 2(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= -3 + (3-2n) \cdot 2^n,$$

$$\text{故 } A_n = 3 + (2n-3) \cdot 2^n,$$

$$\text{令 } B_n = 2[-1 + 3 - 5 + \cdots - (2n-3) + (2n-1)], \text{ 则 } B_n = 2 \cdot 2 \cdot \frac{n}{2} = 2n,$$

$$\text{故 } T_n = A_n - B_n = 3 + (2n-3) \cdot 2^n - 2n.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } A_n = 3 + (2n-3) \cdot 2^n,$$

$$B_n = 2[-1 + 3 - 5 + \cdots - (2n-5) + (2n-3) - (2n-1)]$$

$$= 2 \left[2 \cdot \frac{n-1}{2} - 2n + 1 \right]$$

$$= -2n,$$

$$\text{所以 } T_n = A_n - B_n = 3 + (2n-3) \cdot 2^n + 2n,$$

$$\text{综上, } T_n = \begin{cases} 3 + (2n-3) \cdot 2^n - 2n, n \text{ 为偶数} \\ 3 + (2n-3) \cdot 2^n + 2n, n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明

2. 分组求和

9. 2021年天津南开区高三一模第19题15分 ★★★★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_2^2 = a_3 + a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = a_1$,

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求证: 数列 $\left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为等差数列, 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最大值.

(3) 求 $\sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}}.$

【答案】 (1) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$

(2) 证明见解析, 10.

$$(3) 2 + \frac{n^2 - 2}{2^n}.$$

【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } a_1 = 3, a_2^2 = a_3 + a_4, \text{ 可得 } 9q^2 = 3q^2 + 3q^3,$$

$$\text{解得 } q = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 } nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1), \text{ 得 } \frac{b_{n+1}}{n+1} - \frac{b_n}{n} = -1,$$

$$\text{又 } \frac{b_1}{1} = 3,$$

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 3, 公差为 -1 的等差数列.

$$\text{所以 } \frac{b_n}{n} = 3 - (n-1) = 4 - n,$$

$$\text{所以 } b_n = 4n - n^2,$$

$$\text{依题意有 } \begin{cases} b_n = 4n - n^2 \geq 0 \\ b_{n+1} = 4(n+1) - (n+1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

解得 $3 \leq n \leq 4$, 所以当 $n = 3$ 或 4 时, $\{b_n\}$ 前 n 项和取最大值, 最大值为 10.

$$(3) \text{ 因为 } \frac{3b_k}{a_{k+1}} = \frac{3(4k - k^2)}{3 \cdot 2^k} = \frac{4k - k^2}{2^k} = \frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{k^2}{2^k} - \frac{(k-1)^2}{2^{k-1}} \right] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= \frac{n^2}{2^n} + 2 - \frac{2}{2^n} = 2 + \frac{n^2 - 2}{2^n}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 分组法求和; 数列中最大项与最小项的求解问题; 等差数列的判定 (涉及新数列构造); 等比数列求通项问题

10. 2019年高考真题天津卷理科第19题14分 ★★★★★

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【答案】(1) $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \cdot 2^n$.

(2) ① $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

$$\text{② } \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i = 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

【解析】(1) 依题意得 $\begin{cases} 6q = 6 + 2d \\ 6q^2 = 12 + 4d \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} d=3 \\ q=2 \end{cases},$$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \cdot 2^n$.

$$(2) \textcircled{1} \quad a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = a_{2^n}(b_n - 1) = (3 \times 2^n + 1)(3 \times 2^n - 1) = 9 \times 4^n - 1,$$

所以, 数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式为 $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i &= \sum_{i=1}^{2^n} [a_i + a_i(c_i - 1)], \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} a_i + \sum_{i=1}^{2^n} a_i(c_i - 1), \\ &= \left(2^n \times 4 + \frac{2^n(2^n - 1)}{2} \times 3 \right) + \sum_{i=1}^n (9 \times 4^i - 1), \\ &= (3 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-2}) + 9 \times \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} - n, \\ &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*). \\ \text{故} \quad \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和

11. 2021年天津河西区天津市实验中学高三下学期高考模拟(6月)第19题 ★★★

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0,

$$b_2 + b_3 = 12, \quad b_3 = a_3 + a_5, \quad b_6 = S_{11} - 2.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

$$(2) \text{ 设数列 } \{c_n\} \text{ 满足 } c_n = \begin{cases} a_n, & n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \neq 2^k \\ \log_{\frac{1}{2}} a_n \cdot \log_2 b_n, & n = 2^k \end{cases}, \text{ 其中 } k \in \mathbf{N}^*.$$

① 求数列 $\{c_{2^n}\}$ 的通项公式.

$$\textcircled{2} \text{ 求 } \sum_{i=1}^{2^n} c_i.$$

【答案】 (1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$.

$$(2) \textcircled{1} \quad c_{2^n} = -n \cdot 2^n.$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^{2^n} c_i = 2^{2n-1} - (4n - 1) \cdot 2^{n-1}.$$

【解析】 (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$,

$$\text{由 } b_2 + b_3 = 2q + 2q^2 = 12, \text{ 即 } q^2 + q - 6 = 0, \text{ 解得}$$

$$q = 2 \text{ 或 } -3.$$

$$\because q > 0, \therefore q = 2, \therefore b_n = 2^n,$$

$$\text{有 } b_3 = 8 = a_3 + a_5 = 2a_4, \therefore a_4 = 4,$$

$$\text{又有 } b_6 = S_{11} - 2, \text{ 即 } 11a_6 - 2 = 64, \therefore a_6 = 6,$$

$$\text{则 } d = \frac{a_6 - a_4}{2} = 1, \text{ 则 } a_n = n.$$

即 $a_n = n$, $b_n = 2^n$.

$$(2) \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \quad c_n = \begin{cases} n, n \neq 2^k \\ \log_{\frac{1}{2}} n \cdot \log_2 2^n, n = 2^k \end{cases},$$

$$\therefore n = 2^k \text{ 时, } c_n = n \cdot \log_{\frac{1}{2}} n = n \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2^k = n \cdot (-k) = -k \cdot 2^k,$$

$$\therefore c_{2^k} = -k \cdot 2^k, \text{ 即 } c_{2^n} = -n \cdot 2^n.$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 得 } c_n = \begin{cases} n, n \neq 2^k \\ -k \cdot 2^k, n = 2^k \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^n} c_i &= \sum_{i=1}^{2^n} i - \sum_{i=1}^n 2^i + \sum_{i=1}^n (-i \cdot 2^i) \\ &= \frac{2^n(1+2^n)}{2} - (2^{n+1} - 2) - \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i, \end{aligned}$$

$$\text{设 } A_n = \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n,$$

$$\text{则 } 2A_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1},$$

$$\text{由此得 } A_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

$$\therefore \text{得 } \sum_{i=1}^{2^n} c_i = 2^{2n-1} - (4n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

【标注】【知识点】等差数列的概念与通项公式

12. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三下学期开学考试第19题15分 ★★★

设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等差数列. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的值.

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n (\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【答案】 (1) $\begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ b_n = n \end{cases}.$

(2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n + 1}.$

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} d_i = 2^{2n-1} + (4n-3) \cdot 2^{n-1} + 2, n \in \mathbf{N}^*.$

【解析】 (1) 令 $\{a_n\}$ 公比为 q ($q > 0$),

$\{b_n\}$ 公差为 d .

$$\text{则有 } \begin{cases} a_1 q^2 = a_1 q + 2 \\ a_1 q^3 = 2b_1 + 6d \\ a_1 q^4 = 3b_1 + 13d \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = d = 1 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ b_n = n \end{cases}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}, \\
\therefore T_n &= C_1 + C_2 + \cdots + C_n \\
&= \left(\frac{1}{2^0+1} - \frac{1}{2^1+1} \right) + \left(\frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1}. \\
(3) \quad \sum_{i=1}^{2^n} d_i &= \sum_{i=1}^{2^n} b_i - \sum_{i=1}^n 2^i + \sum_{i=1}^n 2^i(i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} b_i + \sum_{i=1}^n 2^i \cdot i, \\
T_1 &= \sum_{i=1}^{2^n} b_i = \frac{(1+2^n)2^n}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1}, \\
T_2 &= \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n, \\
2T_2 &= 1 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}, \\
-T_2 &= 2 + \frac{4-2^n \cdot 2}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} \\
&= 2 - 4 + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1} \\
&= -2 + (1-n) \cdot 2^{n+1}. \\
\therefore T_2 &= 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}, \\
\therefore \sum_{i=1}^{2^n} d_i &= T_1 + T_2 = 2^{2n-1} + (4n-3) \cdot 2^{n-1} + 2, \quad n \in \mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和；裂项相消法求和；等比数列求通项问题

13. 2020~2021学年1月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考第18题15分 ★★★

设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，且 $a_1 = b_1 = 3$ ， $b_2 = a_3$ ， $b_3 = 4a_2 + 3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求 $\sum_{i=1}^{2n} a_i c_i$ 。

【答案】 (1) $a_n = 3n$ ， $b_n = 3^n$ 。

(2) $\frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

依题意，得 $\begin{cases} 3q = 3 + 2d \\ 3q^2 = 15 + 4d \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} d = 3 \\ q = 3 \end{cases}$ (负值舍去)。

故 $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n$ ， $b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ 。

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$ ，

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3^n$ 。

$$\begin{aligned}
(2) \quad \sum_{i=1}^{2n} a_i c_i &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n} \\
&= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 b_1 + a_4 b_2 + a_6 b_3 + \cdots + a_{2n} b_n) \\
&= \left[n \times 3 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 \right] + (6 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + 18 \times 3^3 + \cdots + 6n \times 3^n) \\
&= 3n^2 + 6 \times (1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n) . \\
\text{记 } T_n &= 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n, \quad ① \\
\text{则 } 3T_n &= 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^{n+1}, \quad ② \\
② - ① &\text{得:} \\
2T_n &= -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n \times 3^{n+1} \\
&= -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \times 3^{n+1} \\
&= \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2} . \\
\text{所以 } a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_{2n} c_{2n} &= 3n^2 + 6T_n \\
&= 3n^2 + 3 \times \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{2} \\
&= \frac{(2n-1)3^{n+2} + 6n^2 + 9}{2} (n \in \mathbf{N}^*) .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和；错位相减法求和；等比数列求通项问题

14. 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第19题15分 ★★★

设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于 0， $\{b_n\}$ 是等差数列， $(n \in \mathbf{N}^*)$. 已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1$ ， $c_n = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, & n = 3^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{b_{3^n} (c_{3^n} - 1)\}$ 的通项公式 .

② 若 $\left\{ \frac{na_n}{(n+1)(n+2)} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和为 T_n ，求 $T_{3n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，

$$b_n = n, \quad n \in \mathbf{N}^* .$$

(2) ① $3 \times 6^{n-1} - 3^n$.

$$② \quad \frac{8^n}{3n+2} + \frac{6^{n+1} + 4}{10} + \frac{9^n - 2 \times 3^n}{2} .$$

【解析】 (1) 由题意，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，

$$\text{则 } a_2 = q, \quad a_3 = q^2,$$

$$\text{又因为 } a_3 = a_2 + 2,$$

$$\text{则 } q^2 - q - 2 = 0,$$

解得 $q = -1$ (舍去), 或 $q = 2$,

$$\therefore a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*,$$

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则由 } a_4 = b_3 + b_5, \text{ 可得 } b_1 + 3d = 4,$$

$$\text{由 } a_5 = b_4 + 2b_6, \text{ 可得 } 3b_1 + 13d = 16,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} b_1 + 3d = 4 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases},$$

$$\therefore b_n = n, n \in \mathbf{N}^*.$$

(2) ① 由 (1), 可知

$$c_n = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, & n = 3^k \end{cases} = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ 2^{k-1}, & n = 3^k \end{cases},$$

$$\therefore b_{3^n} (c_{3^n} - 1) = b_{3^n} (a_n - 1)$$

$$= 3^n (2^{n-1} - 1) = 3 \times 6^{n-1} - 3^n.$$

② 由题意, 可得

$$\frac{na_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n \times 2^{n-1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^n}{n+2} - \frac{2^{n-1}}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } T_n &= \frac{2^1}{3} - \frac{2^0}{2} + \frac{2^2}{4} - \frac{2^1}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n+2} - \frac{2^{n-1}}{n+1} \\ &= \frac{2^n}{n+2} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore T_{3n} = \frac{2^{3n}}{3n+2} - \frac{1}{2} = \frac{8^n}{3n+2} - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i = \sum_{i=1}^{3^n} [b_i (c_i - 1) + b_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{3^n} b_i (c_i - 1) + \sum_{i=1}^{3^n} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^n b_{3^i} (c_{3^i} - 1) + \sum_{i=1}^{3^n} b_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (3 \times 6^{i-1} - 3^i) + \sum_{i=1}^{3^n} i$$

$$= \sum_{i=1}^n 3 \times 6^{i-1} - \sum_{i=1}^n 3^i + \sum_{i=1}^{3^n} i$$

$$= \frac{3 \times (1 - 6^n)}{1 - 6} - \frac{3 \times (1 - 3^n)}{1 - 3} + \frac{(1 + 3^n) \times 3^n}{2}$$

$$= \frac{3 \times (6^n - 1)}{5} - \frac{3 \times (3^n - 1)}{2} + \frac{(1 + 3^n) \times 3^n}{2}$$

$$= \frac{6^{n+1} + 9}{10} + \frac{3^{2n} - 2 \times 3^n}{2},$$

$$\therefore T_{3n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i = \frac{8^n}{3n+2} - \frac{1}{2} + \frac{6^{n+1} + 9}{10} + \frac{3^{2n} - 2 \times 3^n}{2}$$

$$= \frac{8^n}{3n+2} + \frac{6^{n+1} + 4}{10} + \frac{9^n - 2 \times 3^n}{2}.$$

【标注】【知识点】分组法求和；常见数列的通项公式；等差数列求通项问题；利用方程组求等比数列；等比数列求通项问题

3. 数列与不等式综合

15. 2020年天津滨海新区大港第一中学高三下学期高考模拟(3月)第18题 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶} \\ n, n \text{ 为奇} \end{cases}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) ①当 n 为偶数时, $a_{n+2} = 3a_n$.

即 $q^2 = 3$.

$q = 3^{\frac{1}{2}}$.

$a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 3^{\frac{n}{2}}$.

②当 n 为奇数时 $a_{n+2} = a_n + 2$.

即 $2d = 2$.

$d = 1$.

$a_n = a_1 + (n-1)d = n$.

综上: $a_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶} \\ n, n \text{ 为奇} \end{cases}$.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, 则 $b_n = \frac{2n-1}{3^n}$,

则 $S_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{5}{27} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n}$ ①,

则有 $\frac{1}{3}S_n = \frac{1}{9} + \frac{3}{27} + \frac{5}{81} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n+1}}$ ②,

① - ② 可得: $\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$,

变形可得: $S_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}$,

若证明 $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$, 则需要证明 $1 - \frac{n+1}{3^n} \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$,

即证明 $3^n \geq 2^n + 1$ ($n \geq 1$),

即证明 $3^n - 2^n \geq 1$,

显然成立,

故有 $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和

16. 2016~2017学年浙江嘉兴高三上学期期末第19题15分 ★★★

已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n = a_n \cdot \log_{\frac{1}{2}} a_n$, $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 求使 $S_n + n \cdot 2^{n+1} > 50$ 成立的正整数 n 的最小值.

【答案】 (1) 数列的通项公式为 $a_n = 2^n$.

(2) 使成立的正整数 n 的最小值为 5.

【解析】 (1) 设等比数列的首项为 a_1 , 公比为 q .

依题意, 有 $2(a_3 + 2) = a_2 + a_4$, 代入 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$.

可得 $a_3 = 8$.

$\therefore a_2 + a_4 = 20$.

即 $\begin{cases} a_1 q^2 = 8 \\ a_1 q + a_1 q^3 = 20 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_1 = 32 \end{cases}$.

又: 数列单调递增.

$\therefore q = 2, a_1 = 2$.

$\therefore$ 数列的通项公式为 $a_n = 2^n$.

(2) $\because b_n = 2^n \log_{\frac{1}{2}} 2^n = -n \cdot 2^n$.

$\therefore S_n = -(1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^n)$.

$2S_n = -[1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}]$,

两式相减, 得 $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$.

要使 $S_n + n \cdot 2^{n+1} > 50$, 即 $2^{n+1} - 2 > 50$, 即 $2^{n+1} > 52$.

易知: 当 $n \leq 4$ 时, $2^{n+1} \leq 2^5 = 32 < 52$.

当 $n \geq 5$ 时, $2^{n+1} \geq 2^6 = 64 > 52$. 故使成立的正整数的最小值为 5.

【标注】【知识点】错位相减法求和

4. 数列放缩

17. 2018~2019 学年天津和平区天津市耀华中学高三下学期开学考试理科第18题13分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = 2(1-n)a_n$. 证明: $b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots + b_{n+1}^2 < \frac{2}{3}$.

【答案】 (1) $a_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ \frac{1}{2n(1-n)}, n \geq 2 \end{cases}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1}$,

$\therefore 2S_n S_{n-1} + S_n = S_{n-1}$,

$$\begin{aligned}
2 + \frac{1}{S_{n-1}} &= \frac{1}{S_n}, \\
\therefore \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} &= 2, \\
\therefore \left\{ \frac{1}{S_n} \right\} &\text{是以首项 } \frac{1}{S_1} = 2, \text{ 公差为 } 2 \text{ 的等差数列,} \\
\therefore \frac{1}{S_n} &= 2 + 2(n-1) = 2n, \\
\therefore S_n &= \frac{1}{2n}, \\
n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{-1}{2n(n-1)}, \\
n = 1 \text{ 时, } a_1 &= 2, \\
\therefore a_n &= \begin{cases} 2, n=1 \\ \frac{1}{2n(n-1)}, n \geq 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

(2) 由(1)得:

$$\begin{aligned}
n \geq 2 \text{ 时, } b_n &= 2(1-n)a_n = \frac{1}{n}, \\
\therefore b_n^2 &= \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \\
\therefore b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \cdots + b_{n+1}^2 &< 2 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\
&= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{2}{3}. \\
\therefore b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \cdots + b_{n+1}^2 &< \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】放缩法；等差数列的判定与证明问题；裂项相消法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；数列与不等式综合

18. 2015年天津河西区高三二模文科第20题14分 ★★★★★

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明：对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

【答案】(1) $a_2 = 4$;

(2) $a_n = n^2$.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 依题意, $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3}$,

又 $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $a_2 = 4$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n$,

$$2S_{n-1} = (n-1)a_n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1) \text{ 两式相减得}$$

$$2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - \frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - (2n-1) - \frac{2}{3},$$

$$\text{整理得 } (n+1)a_n = na_{n+1} - n(n+1),$$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1,$$

$$\text{又 } \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1,$$

故数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 1 的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n, \text{ 所以 } a_n = n^2.$$

$$(3) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } \frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4};$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4};$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\text{此时 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$< 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4},$$

$$\text{综上, 对一切正整数 } n, \text{ 有 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}.$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

19. 2015年广东揭阳高三一模理科第19题14分 ★★★

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = na_n - 3n(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_2 = 11$.

(1) 求 a_1 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \sqrt{\frac{n}{S_n}}$, 求证: $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}$.

【答案】 (1) 5

$$(2) S_n = 3n^2 + 2n.$$

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because S_n = na_n - 3n(n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_2 = 11$.

$$\therefore S_2 = a_1 + a_2 = 2a_2 - 3 \times 2 \times (2-1),$$

$$\therefore a_2 = 11, \therefore a_1 = 5.$$

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\text{得 } a_n = na_n - 3n(n-1) - [(n-1)a_{n-1} - 3(n-1)(n-2)],$$

$$\therefore (n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} = 6(n-1),$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 6, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1 = 5$, 公差为 6 的等差数列,

$$\begin{aligned}
& \therefore a_n = a_1 + 6(n-1) = 6n-1, \\
& \therefore S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = 3n^2 + 2n. \\
(3) & \therefore b_n = \sqrt{\frac{n}{S_n}} = \frac{1}{\sqrt{3n+2}} = \frac{2}{2\sqrt{3n+2}} < \frac{2}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n+2}} \\
& = \frac{2(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})}{(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})} \\
& = \frac{2}{3}(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1}). \\
& \therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\
& < \frac{2}{3}[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{8} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})] \\
& = \frac{2}{3}(\sqrt{3n+2} - \sqrt{2}) < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}, \\
& \therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】放缩法证明数列不等式；构造等差数列求通项；裂项相消法求和

20. 2021年天津河东区高三一模第19题15分 ★★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和正项等比数列 $\{b_n\}$ ， $a_1 = -5$ ， $b_1 = 2$ ， a_5 既是 $b_3 - a_3$ 与 $b_1 - a_1$ 的等差中项，又是其等比中项。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) $c_n = |a_n|$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

(3) 证明： $\sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{i(i-1)b_{i+1}} < \frac{1}{2}$ 。

【答案】 (1) $a_n = 3n - 8$ ， $b_n = 2^n$ 。

$$(2) S_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n & (n=1, 2) \\ \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n + 14 & (n=3, 4, 5, \dots) \end{cases}$$

(3) 证明见解析。

【解析】 (1) 设 $a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1)d$ ， $b_n = b_1 q^{n-1} = 2 \cdot q^{n-1}$ ，

$$\text{则 } a_5 = 4d - 5, \quad b_1 - a_1 = 7, \quad b_3 - a_3 = 2q^2 - 2d + 5,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 2(4d-5) = 7 + 2q^2 - 2d + 5 \\ (4d-5)^2 = 7 \cdot (2q^2 - 2d + 5) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} d=3 \\ q=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} d=3 \\ q=-2 \end{cases} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore a_n = 3n - 8, \quad b_n = 2^n.$$

$$(2) c_n = |a_n| = \begin{cases} 8 - 3n & (n=1, 2) \\ 3n - 8 & (n=3, 4, 5, \dots) \end{cases}$$

$$\text{则 } n=1, 2 \text{ 时, } S_n = \frac{(5+8-3n)n}{2} = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n,$$

$n=3, 4, 5, \dots$ 时，

$$S_n = 5 + 2 + \frac{(1+3n-8)(n-2)}{2} = \frac{3n^2}{2} - \frac{13n}{2} + 14,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \begin{cases} -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n & (n=1, 2) \\ \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n + 14 & (n=3, 4, 5, \dots) \end{cases} \\ (3) \quad \sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{i(i-1)b_{i+1}} &= \sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{i(i-1) \cdot 2^{i+1}}, \\ \therefore \frac{i^2+1}{2i(i-1)} &= \frac{i^2+1}{i^2+1+i^2-2i-1} = \frac{i^2+1}{i^2+1+(i-1)^2-2} < 1, \\ \text{在 } i \geq 3 \text{ 时恒成立,} \\ \therefore \frac{i^2+1}{i(i-1) \cdot 2^{i+1}} &< \frac{1}{2^i} \text{ 在 } i \geq 3 \text{ 时恒成立,} \\ \therefore \sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{i(i-1)b_{i+1}} &= \frac{5}{16} + \frac{5}{48} + \sum_{i=4}^n \frac{i^2+1}{i(i-1)b_{i+1}} \\ &< \frac{5}{16} + \frac{5}{48} + \sum_{i=4}^n \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{5}{12} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{5}{12} + \frac{1}{8} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】放缩法证明数列不等式；等差数列求通项问题；等差数列求和问题；等比数列求通项问题