

04数列综合

1. 数列分奇偶

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 且满足 $a_1 + a_2 = 6a_3$, $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $c_n = \begin{cases} \frac{3b_n + 8}{b_n b_{n+2}} \cdot a_{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ a_n b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .
2. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列 , $\{b_n\}$ 是递增的等差数列 , $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $S_4 = a_1 + a_3$, $a_2 = b_1 + b_3$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $d_n = a_n + b_n$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , 求满足 $T_n > 2^{n+1} + 1$ 成立的 n 的最小值 .
- (3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} a_n b_n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3b_n - 2)a_n}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 .
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 , 设 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列 , $b_n > 0$, 若 $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $b_3 + S_2 = 12$, $a_5 - 2b_2 = a_3$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 .
- (3) 若 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 .
4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列 , $\{b_n\}$ 为等比数列 , $a_1 = b_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , 求 $\{T_n\}$ 的前 n 项和 Q_n .
- (3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .
5. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列 , $\{b_n\}$ 为等比数列且公比大于 0 , $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $2a_3 = 5(a_5 - a_4)$, $2b_3 = b_5 - b_4$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设 $c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{4n}{a_n \cdot a_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) , 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .
- 6.

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*) , \text{ 且 } b_1 = 1 .$$

(1) 证明数列 $\left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为等差数列 , 并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若 $c_n = \frac{(-1)^{n-1} 4(n+1)}{(3+2\log_2 a_n)(3+2\log_2 a_{n+1})}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 .

(3) 若 $d_n = a_n \cdot \sqrt{b_n}$, 数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 D_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $D_n \leq nS_n - a$, 求实数 a 的取值范围 .

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 8$, 设 $b_n = a_n - 2$.

(1) 证明 : $\{b_n\}$ 是等比数列 .

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \geq T_n$ 恒成立 , 求 λ 的取值范围 .

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n$, $n \geq 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项 a_1 , a_2 , a_3 .

(2) 求证 : 数列 $\left\{ a_n + \frac{2}{3} \cdot (-1)^n \right\}$ 是等比数列 .

(3) 求数列 $\{(6n-3) \cdot a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

2. 分组求和

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 3$, $a_2^2 = a_3 + a_4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 : $b_1 = a_1$,

$$nb_{n+1} - (n+1)b_n = -n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*) .$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 求证 : 数列 $\left\{ \frac{b_n}{n} \right\}$ 为等差数列 , 并求 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最大值 .

(3) 求 $\sum_{k=1}^n \frac{3b_k}{a_{k+1}}$.

10. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列 , $\{b_n\}$ 是等比数列 , 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式 .

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列 , 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列 , 且公比大于 0 ,

$$b_2 + b_3 = 12 , b_3 = a_3 + a_5 , b_6 = S_{11} - 2 .$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \neq 2^k \\ \log_{\frac{1}{2}} a_n \cdot \log_2 b_n, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

①

求数列 $\{c_{2^n}\}$ 的通项公式 .

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} c_i$.

12. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列 , 公比大于 0 , 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , $\{b_n\}$ 是等差数列 . 已知 $a_1 = 1$,

$$a_3 = a_2 + 2, \quad a_4 = b_3 + b_5, \quad a_5 = b_4 + 2b_6 .$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的值 .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n (\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

13. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列 , $\{b_n\}$ 是等比数列 , 公比大于 0 , 且 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数} \\ b_{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $\sum_{i=1}^{2n} a_i c_i$.

14. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列 , 公比大于 0 , $\{b_n\}$ 是等差数列 , ($n \in \mathbf{N}^*$) . 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$,

$$a_4 = b_3 + b_5, \quad a_5 = b_4 + 2b_6 .$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, n = 3^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{b_{3^n} (c_{3^n} - 1)\}$ 的通项公式 .

② 若 $\left\{ \frac{na_n}{(n+1)(n+2)} \right\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的前 n 项和为 T_n , 求 $T_{3n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

3. 数列与不等式综合

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n (a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 求证 : $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

16. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 : $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若 $b_n = a_n \cdot \log_{\frac{1}{2}} a_n$, $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 求使 $S_n + n \cdot 2^{n+1} > 50$ 成立的正整数 n 的最小值 .

4. 数列放缩

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 2$ 时 , $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = 2(1-n)a_n$. 证明 : $b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots + b_{n+1}^2 < \frac{2}{3}$.

18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

19. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = na_n - 3n(n-1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_2 = 11$.

(1) 求 a_1 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \sqrt{\frac{n}{S_n}}$, 求证: $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{2}{3}\sqrt{3n+2}$.

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和正项等比数列 $\{b_n\}$, $a_1 = -5$, $b_1 = 2$, a_5 既是 $b_3 - a_3$ 与 $b_1 - a_1$ 的等差中项, 又是其等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) $c_n = |a_n|$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 证明: $\sum_{i=2}^n \frac{i^2 + 1}{i(i-1)b_{i+1}} < \frac{1}{2}$.