

## 03数列求和习题

### 1. 倒序相加法

1. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \frac{4^{x+1}}{4^x + 2}$ ,  $S_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ,  $n = 2, 3, \cdots$ , 则 $S_n =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $2n - 2$

【解析】  $\because f(x) = \frac{4^{x+1}}{4^x + 2}$ ,  
 $\therefore f(1-x) = \frac{4^{2-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4^2}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{8}{4^x + 2}$ ,  
 $\therefore f(x) + f(1-x) = 4$ ,  
 $\therefore S_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)$   
 $= 4 \times \frac{n-1}{2} = 2n - 2$ .  
故答案为:  $2n - 2$ .

【标注】 【知识点】 倒序相加法求和; 实数指数幂运算

2. 已知 $f(x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$ , 则 $f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2019}{2020}\right) =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{2019}{2}$

【解析】  $\because f(x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$ ,  
 $\therefore f(x) + f(1-x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}} + \frac{3^{1-x}}{3^{1-x} + \sqrt{3}}$   
 $= \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3^x}$   
 $= 1$ .  
记 $S = f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{2}{2020}\right) + f\left(\frac{3}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{2019}{2020}\right)$ ,  
则 $S = f\left(\frac{2019}{2020}\right) + f\left(\frac{2018}{2020}\right) + f\left(\frac{2017}{2020}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2020}\right)$ ,  
 $\therefore 2S = 1 \times 2019$ ,  
 $\therefore S = \frac{2019}{2}$ .

【标注】 【知识点】 倒序相加法求和

3. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ , 则 $f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $504\sqrt{2}$

【解析】  $\because f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$   
 $\therefore f(1-x) = \frac{1}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{2^x}{2 + \sqrt{2} \cdot 2^x} = \frac{2^x}{\sqrt{2}(2^x + \sqrt{2})}$   
 $\therefore f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{2^x}{\sqrt{2}(2^x + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} + 2^x}{\sqrt{2}(2^x + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\therefore f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2016}{2} = 504\sqrt{2}$   
 $\therefore f\left(\frac{1}{2017}\right) + \cdots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) = 504\sqrt{2}.$

【标注】 【素养】 数学运算

4. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ , 求  $f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{8}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right)$  的值.

【答案】  $\frac{9}{2}$ .

【解析】  $\because f(x) + f(1-x) = 1$ ,  
 $\therefore f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{8}{10}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right)$   
 $= 4 \times 1 + f\left(\frac{5}{10}\right)$   
 $= 4 + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}}$   
 $= \frac{9}{2}.$

【标注】 【思想】 转化化归思想

【素养】 数学运算

【素养】 逻辑推理

【知识点】 倒序相加法求和

【方法】 倒序相加法

5. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , 则  $f(2021) + \cdots + f(2) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2021}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\frac{4041}{2}$

【解析】  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ ,  $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ,  
故  $f(2021) + f(2020) + \cdots + f(2) + f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2020}\right) + f\left(\frac{1}{2021}\right)$   
 $= 1 \times 2020 + \frac{1}{2}$

$$= \frac{4041}{2} .$$

【标注】【知识点】倒序相加法求和

## 2. 错位相减法

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 且 $a_{10} = 28$ ,  $S_8 = 92$ , 数列 $\{b_n\}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ , 总有 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1$ 成立.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$ , 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

【答案】(1)  $a_n = 3n - 2$ ;  $b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(2)  $T_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n}$ .

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1$ , 公差为 $d$ , 由 $a_{10} = 28$ ,  $S_8 = 92$ ,

$$\text{得 } a_{10} = a_1 + 9d = 28, S_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times d = 92,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 3, a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,$$

$$\text{又 } \because b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n = 3n + 1,$$

$$\therefore b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} = 3n - 2 (n \geq 2),$$

$$\text{两式相除得 } b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时 $b_1 = 4$ 适合上式,

$$\therefore b_n = \frac{3n+1}{3n-2} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 把 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式代入 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n}$ , 得 $c_n = \frac{a_n \cdot b_n}{2^n} = \frac{3n+1}{2^n}$ ,

$$\text{则 } T_n = \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + \frac{3n+1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{3n-2}{2^n} + \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式作差得: } \frac{1}{2} T_n = 2 + \left( \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{3}{2^n} \right) - \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_n = 2 + 3 \times \frac{\frac{1}{4} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3n+1}{2^{n+1}},$$

$$\text{即 } T_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n}.$$

【标注】【知识点】倒数型递推求通项; 错位相减法求和

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n = 2n^2$ , 在数列 $\{b_n\}$ 中,  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = 3b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = a_n b_n$ , 求数列 $\{c_n\}$ 前 $n$ 项和 $T_n$ .

【答案】(1)  $a_n = 4n - 2$ ,  $b_n = 3^{n-1}$ .

(2)  $T_n = (2n - 2)3^n + 2$ .

【解析】(1) ∵ 当  $n = 1$  时,  $a_1 = S_1 = 2$ ; 当  $n \geq 2$  时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } 4 \times 1 - 2 = 2 = a_1$$

故  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 4n - 2$ ,  $b_n = 3^{n-1}$ .

(2) ∵  $c_n = a_n b_n = (4n - 2)3^{n-1} = 2(2n - 1)3^{n-1}$ ,

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= 2 + 6 \times 3^1 + 10 \times 3^2 + \dots + 2(2n - 1)3^{n-1}$$

$$3T_n = 2 \times 3^1 + 6 \times 3^2 + \dots + 2(2n - 3)3^{n-1} + 2(2n - 1)3^n$$

两式相减得

$$\therefore -2T_n = 2 + 2(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - 2(2n - 1)3^n$$

$$\therefore -2T_n = 2 + 4 \frac{3(1 - 3^{n-1})}{1 - 3} - 2(2n - 1)3^n$$

$$\therefore -T_n = 1 + (3^n - 1) - (2n - 1)3^n$$

$$\therefore T_n = (2n - 2)3^n + 2.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+2} = qa_n$  ( $q$  为实数, 且  $q \neq 1$ ),  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 且  $a_2 + a_3$ ,  $a_3 + a_4$ ,  $a_4 + a_5$  成等差数列.

(1) 求  $q$  的值和  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和.

【答案】(1)  $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k - 1, \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$

(2)  $4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$

【解析】(1) 依题意  $a_3 = q$ ,  $a_4 = 2q$ ,  $a_5 = q^2$ .

因为  $a_2 + a_3$ ,  $a_3 + a_4$ ,  $a_4 + a_5$  成等差数列, 所以  $a_3 + a_4 = a_2 + a_5$ ,

所以  $3q = q^2 + 2$ ,  $q = 2$  或者  $q = 1$  (舍)

当  $n = 2k - 1$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 时,  $a_n = a_{2k-1} = 2^{k-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$ ;

当  $n = 2k$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 时,  $a_n = a_{2k} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}}$ .

所以,  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k - 1, \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbf{N}^*.$

(2) 由 (1) 得  $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*.$

设数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ .

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n},$$

两式相减, 得

$$\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n},$$

$$\text{整理得, } T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

$$\text{所以数列}\{b_n\}\text{的前}n\text{项和为}4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*.$$

**【标注】**【知识点】错位相减法求和；分段数列问题

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 且 $2S_n = 3a_n - 1, n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = na_n$ , 求数列 $\{b_{2n-1}\}$ 的前 $n$ 项的和 $T_n$ .

**【答案】**(1) 证明见解析,  $a_n = 3^{n-1}$ .

$$(2) T_n = \frac{8n-5}{32} \cdot 9^n + \frac{5}{32}.$$

**【解析】**(1)  $\because 2S_n = 3a_n - 1$ , ①

$$2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 1, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得, } 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1},$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3,$$

$$\therefore n=1 \text{ 时, } 2S_1 = 3a_1 - 1,$$

$$\therefore a_1 = 1, \therefore \{a_n\} \text{ 是首项为 } 1,$$

$$\text{公比为 } 3 \text{ 的等比数列, } a_n = 3^{n-1}.$$

$$(2) b_n = na_n = n \cdot 3^{n-1}.$$

$$\therefore \text{数列}\{b_{2n-1}\}\text{的前}n\text{项的和} T_n = b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}$$

$$= 1 + 3 \cdot 3^2 + 5 \times 3^4 + \cdots + (2n-3)3^{2n-4} + (2n-1) \cdot 3^{2n-2}$$

$$9T_n = 9 + 3 \times 3^4 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{2n-2} + (2n-1) \cdot 3^{2n},$$

$$\therefore -8T_n = 1 + 2(3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2n-2}) - (2n-1) \cdot 3^{2n}$$

$$= 2 \times \frac{3(9^n - 1)}{9 - 1} - 5 - (2n-1) \cdot 3^{2n}.$$

$$\text{解得 } T_n = \frac{8n-5}{32} \cdot 9^n + \frac{5}{32}.$$

**【标注】**【知识点】等比数列求通项问题；错位相减法求和

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 且 $a_2 = 2, S_4 = 10$ , 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \log_2 b_n$ , 其中 $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；  
 (2) 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$  .

**【答案】** (1)  $a_n = n$  .

(2)  $T_n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$  .

**【解析】** (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$  ,

由 $a_2 = 2$  , 得 $a_1 + d = 2$  , ①

由 $S_4 = 10$  , 得 $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2} \times d = 10$  , ②

根据①, ②解方程, 得 $a_1 = 1$  ,  $d = 1$  ,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = n$  .

(2) 由 (I) , 得 $a_n = n = \log_2 b_n$  ,

所以 $b_n = 2^n$  .

所以 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n$  , ①

则 $2T_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$  , ②

由①-②, 得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \times 2^{n+1}$  ,

所以 $T_n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$  ,

所以数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$  .

**【标注】**【知识点】错位相减法求和

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 其前 $n$ 项和为 $S_n$  , 且 $S_n = 2^n + a(n \in \mathbf{N}^*)$  .

- (1) 求 $a$ 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；  
 (2) 若 $b_n = (2n-1)a_n$  , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$  .

**【答案】** (1)  $a = -1$  .  $a_n = 2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$  .

(2)  $T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3$  .

**【解析】** (1) 当 $n = 1$ 时,  $S_1 = a_1 = 2 + a$  .

当 $n \geq 2$ 时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$  .

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列,

所以 $a_1 = 2 + a = 2^{1-1} = 1$  , 即 $a_1 = 1$  .  $a = -1$  .

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$  .

(2) 由 (1) 得 $b_n = (2n-1)a_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}$  .

则 $T_n = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$  . ①

$$2T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n. \quad ②$$

$$\begin{aligned} ①-② \text{ 得 } -T_n &= 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n \\ &= 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n \\ &= 1 + 4(2^{n-1} - 1) - (2n-1) \cdot 2^n \\ &= -(2n-3) \cdot 2^n - 3. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3.$$

**【标注】**【知识点】错位相减法求和；等比数列的性质及应用；等比数列求通项问题

### 3. 裂项相消法

12. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，已知 $a_1 = 1$ ， $S_n = na_n - n(n-1)(n \in \mathbf{N}_+)$

(1) 求 $a_n$ 的表达式；

(2) 若数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ，问：满足 $T_n > \frac{100}{209}$ 的最小正整数 $n$ 是多少？

**【答案】**(1)  $a_n = 2n - 1$

(2) 12.

**【解析】**(1) 当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = na_n - (n-1)a_{n-1} - 2(n-1) \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2(n \geq 2)$   
 $\Rightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项，以2为公差的等差数列， $\therefore a_n = 2n - 1$

(2) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \\ \text{由 } \frac{n}{2n+1} &> \frac{100}{209} \text{ 解得 } n > \frac{100}{9}. \text{ 故满足 } T_n > \frac{100}{209} \text{ 的最小正整数 } n \text{ 是 } 12. \end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】裂项相消法求和

13.  $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 已知 $a_n > 0$ ， $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$ .

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和.

**【答案】**(1)  $a_n = 2n + 1$ .

(2)  $\frac{n}{3(2n+3)}$ .

【解析】(1) 由  $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$  , 可知  $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$  .

可得  $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$  , 即

$$2(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) .$$

由于  $a_n > 0$  , 可得  $a_{n+1} - a_n = 2$  .

又  $a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3$  , 解得  $a_1 = -1$  (舍去) ,  $a_1 = 3$  .

所以  $\{a_n\}$  是首相为 3 , 公差为 2 的等差数列 , 通项公式为  $a_n = 2n + 1$  .

(2) 由  $a_n = 2n + 1$  可知

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) .$$

设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$  , 则

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right] \\ &= \frac{n}{3(2n+3)} . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

14. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  , 记其前  $n$  项和为  $S_n$  , 若  $S_n = 5$  , 则项数  $n$  的值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 35

【解析】 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  ,

前  $n$  项和为  $S_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$  ,

$S_n = 5$  , 可得  $\sqrt{n+1} - 1 = 5$  , 解得  $n = 35$

故答案为 35 .

【标注】【知识点】裂项相消法求和

【素养】数学运算

## 4. 简单的分组求和

15. 已知数列  $\{a_n\}$  中 ,  $a_1 = 1$  ,  $a_2 = 3$  ,  $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$  .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式 .

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$  .

【答案】 (1)  $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$  .

(2)  $S_{2n} = n^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}$  .



【解析】(1) 当 $n$ 为奇数时,  $a_{n+2} = -(a_n - 1) + 2a_n + 1$ ,

$$\therefore a_{n+2} - a_n = 2,$$

$$\therefore a_3 - a_1 = 2,$$

$$a_5 - a_3 = 2,$$

$$a_7 - a_5 = 2,$$

$\vdots$

$$a_n - a_{n-2} = 2.$$

将上述 $\frac{n-1}{2}$ 个式子相加, 得 $a_n - a_1 = 2 \times \frac{n-1}{2} = n-1$ ,

即 $a_n = n$ .

当 $n$ 为偶数时,  $a_{n+2} = a_n - 1 + 2a_n + 1$ ,

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_n} = 3,$$

$$\therefore \frac{a_4}{a_2} = 3,$$

$$\frac{a_6}{a_4} = 3,$$

$$\frac{a_8}{a_6} = 3,$$

$\vdots$

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = 3,$$

将上述 $\frac{n-2}{2}$ 个式子相乘, 得 $\frac{a_n}{a_2} = 3^{\frac{n-2}{2}}$ ,

$$\therefore a_n = 3^{\frac{n}{2}},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 3^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

(2)  $S_{2n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1} + a_{2n}$ ,

$$\therefore S_{2n} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-3} + a_{2n-1} + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}$$

$$= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n$$

$$= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{3(1-3^n)}{1-3}$$

$$= n^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_{2n} = n^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2}.$$

【标注】【知识点】分组法求和；利用累乘法求数列通项公式问题；利用累加法求数列通项公式问题

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n - a_n\}$ 是首项为3, 公差为3的等差数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

【答案】(1)  $a_n = 2^{n-1}$ .

$$(2) T_n = 2^n - 1 + \frac{3n^2 + 3n}{2}.$$

【解析】(1)  $\because S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^+)$ ,

$\therefore n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$ , 化为:  $a_n = 2a_{n-1}$ ,

$n = 1$  时,  $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$ , 解得  $a_1 = 1$ ,

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 公比为 2, 首项为 1,

$$\therefore a_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) b_n - a_n = 3 + 3(n-1) = 3n,$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1} + 3n,$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2^n - 1 + \frac{3n^2 + 3n}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和

17. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_2 = 5$ ,  $S_3 = a_7$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

(2) 若  $b_n = 2^{a_n}$ , 求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和.

【答案】(1)  $a_n = 2n + 1$

$$(2) n^2 + 2n + \frac{8(4^n - 1)}{3}$$

【解析】(1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ .

$$\begin{cases} a_1 + d = 5 \\ 3a_1 + 3d = a_1 + 6d \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 3, d = 2.$$

由  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , 则  $a_n = 2n + 1$ .

因此, 通项公式为  $a_n = 2n + 1$ .

(2) 由 (1) 可知:  $a_n = 2n + 1$ , 则  $b_n = 2^{2n+1}$ ,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{2(n+1)+1}}{2^{2n+1}} = 4 \text{ 因为 } b_1 = 2^3 = 8,$$

所以  $\{b_n\}$  是首项为 8, 公比为  $q = 4$  的等比数列.

记  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则

$$\begin{aligned} T_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= n^2 + 2n + \frac{8(4^n - 1)}{3}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分组法求和

## 5. 并项求和

18. 已知  $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots + (-1)^n(2n-1)$ , 则  $S_n$  的值为 ( ) .

A.  $\pm n$

B.  $(-1)^n n$

C.  $(-1)^{n+1} n$

D.  $2n$

**【答案】** B

**【解析】**  $n$  为偶数时,  $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots + (-1)^n(2n-1)$ ,

$$= (-1 + 3) + (-5 + 7) + \cdots + [-(2n-3) + (2n-1)],$$

$$= 2 + 2 + \cdots + 2 = 2 \times \frac{n}{2} = n,$$

$n$  为奇数时,

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots + (-1)^n(2n-1),$$

$$= (-1 + 3) + (-5 + 7) + \cdots + [-(2n-5) + (2n-3)] - (2n-1),$$

$$= 2 + 2 + \cdots + 2 - (2n-1),$$

$$= 2 \times \frac{n-1}{2} - (2n-1),$$

$$= -n,$$

综上所述, 答案:  $S_n = (-1)^n n$ .

**【标注】**【知识点】分组法求和