

03数列求和

1. 倒序相加法

对于数列 $\{a_n\}$ ，若与首末两项等距离的两项之和等于首末两项之和，即满足

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots$ ，则此数列的前 n 项和可以用倒序相加法求得。

即在使用倒序相加法之前，要验证数列是否满足上述描述条件。

倒序相加法步骤

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_k + a_{n+1-k} = \cdots = t$ (t 为常数)，下面我们利用倒序相加法求其前 n 项和：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

将 S_n 各项倒序重新排列，得：

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1,$$

将上面两式相加得到：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = nt$$

进而得：

$$S_n = \frac{nt}{2}.$$

1. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$ ，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法，可求得

$S = f(-5) + f(-4) + \cdots + f(0) + \cdots + f(5) + f(6)$ 的值为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 此题类比课本中推导等差数列前 n 项和公式的倒序相加法，观察每一个因式的特点，尝试着计算 $f(x) + f(1-x)$ 。

$$\begin{aligned}\because f(x) &= \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}, \\ \therefore f(1-x) &= \frac{1}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{2^x}{2 + \sqrt{2} \cdot 2^x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^x}{\sqrt{2} + 2^x}. \\ \therefore f(x) + f(1-x) &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^x}{\sqrt{2} + 2^x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

发现 $f(x) + f(1-x)$ 正好是一个定值，

$$\therefore 2S = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12, \therefore S = 3\sqrt{2}.$$

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】倒序相加法求和

2. 已知 $f(x)$ 满足 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 + x_2 = 1$ 时, $f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2}$, 若 $S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$, $n \in \mathbf{N}$, 求 S_n .

【答案】 $S_n = \frac{1}{4}(n+1)$.

【解析】因为 $S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$, ①

所以 $S_n = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0)$. ②

①+②, 得

$$2S_n = [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \cdots + [f(1) + f(0)]$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1).$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{1}{4}(n+1).$$

【标注】【知识点】分组法求和

2. 错位相减法

 错位相减法的使用前提 (等差 $\times$ 等比)

错位相减法适用于具有 $\{a_nb_n\}$ 或 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 形式的数列的前 n 项和, 其中数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d \neq 0$ 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是公比 $q \neq 1$ 的等比数列.

【注意】数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{q}$ 的等比数列

 错位相减法步骤

步骤一：乘公比

将上式两边同时乘以等比数列的公比 q , 得到：

$$qS = q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots + nq^{n+1}.$$

步骤二：错位

比较两式中的元素 $q^k (k \in \mathbf{N}^*)$, 将其幂指数对齐, 得到：

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \cdots + nq^n$$

$$qS = \quad q^2 + 2q^3 + 3q^4 \cdots (n-1)q^n + nq^{n+1}.$$

步骤三：相减

将调整后的两式相减得到：

$$(q-1)S_n = nq^{n+1} - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n = nq^{n+1} - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n),$$

括号内的部分是等比数列的前 n 项和，进一步计算得到：

$$S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}-q}{(q-1)^2}, \text{ 将其代入 } (*) \text{ 就可以得到结果.}$$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 0$, $a_6 + a_8 = -10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和.

【答案】 (1) $a_n = 2 - n$.

$$(2) S_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

【解析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由已知条件可得

$$\begin{cases} a_1 + d = 0 \\ 2a_1 + 12d = -10 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = -1 \end{cases}.$$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 - n$.

(2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，即 $S_n = a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}$,

$$\text{故 } S_1 = 1, \quad \frac{S_n}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}.$$

所以当 $n > 1$ 时，

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{2} &= a_1 + \frac{a_2 - a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{a_n}{2^n} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2-n}{2^n} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2-n}{2^n} = \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

$$\text{综上, 数列 } \left\{ \frac{a_n}{2^{n-1}} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为公比大于0的等比数列，且 $b_1 = 1$, $b_2 + b_3 = 6$, $a_3 = 3$, $a_4 + 2a_6 = b_5$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $c_n = (2a_n - 1) \cdot b_{n+1}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n .

【答案】 (1) $a_n = n$; $b_n = 2^{n-1}$.

$$(2) (2n-3) \times 2^{n+1} + 6.$$

【解析】 (1) 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q > 0)$,

$$\text{由 } b_1 = 1, b_2 + b_3 = 6,$$

$$\text{得 } q^2 + q - 6 = 0 ,$$

$$\text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = -3 \text{ (舍去)} ,$$

$$\text{所以 } b_n = 2^{n-1} ,$$

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由 } a_3 = 3 , a_4 + 2a_6 = b_5 ,$$

$$\text{得 } \begin{cases} a_1 + 2d = 3 \\ 3a_1 + 13d = 16 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } a_1 = 1 , d = 1 ,$$

$$\text{所以 } a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 及题意, 得 } c_n = (2n-1) \cdot 2^n (n \in \mathbf{N}^*) ,$$

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \times 2^n \text{ ①} ,$$

$$\text{所以 } 2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n-3) \times 2^n + (2n-1) \times 2^{n+1} \text{ ②} ,$$

$$\text{①}-\text{②得 } -S_n = 2^1 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^{n+1} ,$$

$$\text{即 } S_n = (2n-1) \times 2^{n+1} - 2^1 - 2(2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n)$$

$$= (2n-1) \times 2^{n+1} - 2 - 2 \times \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}$$

$$= (2n-3) \times 2^{n+1} + 6 .$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

5. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项 .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 设 $b_n = a_n \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = 2^n$.

$$(2) S_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} .$$

【解析】 (1) 设公比为 q .

$$\text{由题意知 } 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4 ,$$

$$\text{即 } a_1 q + a_1 q^3 - 2a_1 q^2 = 4 , \text{ ①}$$

$$\text{又 } a_2 + a_3 + a_4 = 28 , \text{ 即 } a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 28 , \text{ ②}$$

$$\text{由①②, 得 } q = \frac{1}{2} \text{ (不合题意, 舍去) 或 } q = 2 , \therefore a_1 = 2 ,$$

$$\text{故数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^n .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = 2^n , \therefore b_n = n \cdot 2^n ,$$

$$\therefore S_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n ,$$

$$\therefore 2S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} ,$$

$$\therefore S_n - 2S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2,$$

$$\therefore S_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2$, $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = b_1$, $b_2(a_2 - a_1) = b_1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) 当 $n=1$ 时 $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时 $a_n = 4n - 2$; $b_n = \frac{2}{4^{n-1}}$.

(2) $T_n = \frac{1}{9}[(6n-5)4^n + 5]$.

【解析】(1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2$,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4n - 2$, 即 $\{a_n\}$ 是 $a_1 = 2$, 公差 $d = 4$ 的等差数列

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $b_1 q d = b_1, d = 4$, 所以 $q = \frac{1}{4}$.

故 $b_n = b_1 q^{n-1} = 2 \times \frac{1}{4^{n-1}}$, 即 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \frac{2}{4^{n-1}}$.

(2) 由题可得, $a_n = 4n - 2$, $b_n = \frac{2}{4^{n-1}}$, $\therefore c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{4n-2}{\frac{2}{4^{n-1}}} = (2n-1)4^{n-1}$,

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 + 3 \times 4 + 5 \times 4^2 + \cdots + (2n-1)4^{n-1},$$

$$4T_n = 1 \times 4 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \cdots + (2n-1)4^n,$$

两式相减得

$$3T_n = -1 - 2(4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1}) + (2n-1)4^n$$

$$= \frac{1}{3}[(6n-5)4^n + 5],$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{9}[(6n-5)4^n + 5].$$

【标注】【思想】函数思想

【方法】错位相减法

【素养】数学运算

【知识点】等比数列求通项问题

【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

【知识点】错位相减法求和

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n > 0$ 且 $a_1 a_3 = 36$, $a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $S_n + 1 = 3^{b_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

$$(2) T_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}.$$

【解析】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由题意得} \begin{cases} a_1 \cdot a_1 q^2 = 36 \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = 9(a_1 + a_1 q) \end{cases},$$

$$\text{由 } a_n > 0, \text{ 得 } a_1 > 0, q > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}, a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1,$$

$$\therefore S_n + 1 = 3^n = 3^{b_n},$$

$$\therefore b_n = n, a_n b_n = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n = 2n \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= 2 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1},$$

$$3T_n = 2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n.$$

$$\therefore -2T_n = [2 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}]$$

$$- [2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n]$$

$$= 2[1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}] - 2n \cdot 3^n$$

$$= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n$$

$$= (1 - 2n) \cdot 3^n - 1$$

$$\therefore T_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和；利用方程组求等比数列

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_3 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 的前 n 项和.

(3) 设 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

【答案】(1) $a_n = 3^n$.

$$(2) Q_n = \frac{2n}{n+1}.$$

$$(3) P_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}.$$

【解析】(1) 由 $2S_n = 3a_n - 3$ 可知, 当 $n=1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = 3a_1 - 3$,

$$\therefore a_1 = 3,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 则有 } 2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 3,$$

$$\therefore 2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = (3a_n - 3) - (3a_{n-1} - 3),$$

$$\text{即 } a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2),$$

$\therefore \{a_n\}$ 是等比数列, 且公比为 3,

$$\therefore a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} = 3^n.$$

$$(2) \text{ 由(1)可知, } b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^n = n,$$

$$\therefore T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{T_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

记数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 的前 n 项和为 Q_n ,

$$\begin{aligned} \text{则 } Q_n &= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 由(2)可知, } b_{2n-1} = 2n - 1,$$

$$\text{则 } c_n = \frac{2n-1}{3^n},$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n} \quad \text{①},$$

$$\frac{1}{3}P_n = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \quad \text{②},$$

$$\text{①-②得 } \frac{2}{3}P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3^2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2n+2}{3^{n+1}},$$

$$\therefore P_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}.$$

【标注】【知识点】等差数列求和问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；错位相减法求和；裂项相消法求和

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_2 = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 且 $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1}$.

【答案】 (1) $S_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{5}{6}.$

(2) ① $b_n = n.$

② $\frac{5}{3} + (n-1) \times 5 \times 3^{n-1}.$

【解析】(1) 由题意得：

$$\begin{cases} a_3 - a_2 = 10 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_2^3 = 125 \end{cases}$$

$$\text{得：} a_2 = 5, a_3 = 15,$$

$$\therefore q = \frac{a_3}{a_2} = 3,$$

$$\therefore a_n = a_2 \cdot q^{n-2} = 5 \times 3^{n-2},$$

$$\text{即 } a_n = 5 \times 3^{n-2},$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{\frac{5}{3} - 5 \times 3^{n-2} \times 3}{1 - 3},$$

$$\text{整理得 } S_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{5}{6}.$$

$$(2) \text{ ① } b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1,$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n-1} = b_n - 1,$$

$$\text{两式相减得：} \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - b_n,$$

$$\text{整理得 } \frac{b_{n+1}}{n+1} = \frac{b_n}{n} (n \geq 2),$$

$$\text{令原式 } n=1, b_1 = b_2 - 1, \text{ 得 } b_2 = 2,$$

$$\therefore \frac{b_2}{2} = \frac{b_1}{1},$$

$$\therefore \left\{ \frac{b_n}{n} \right\} \text{ 为一个常数列, } n \in \mathbf{N}^+,$$

$$\text{首项为 } \frac{b_1}{1} = 1,$$

$$\therefore \frac{b_n}{n} = 1,$$

$$\therefore b_n = n.$$

$$\text{② } a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^{i-2})(2i-1),$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^{-1}) \times 1 + (5 \times 3^0) \times 3 + \cdots + (5 \times 3^{n-2})(2n-1),$$

$$3 \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = (5 \times 3^0) \times 1 + (5 \times 3^1) \times 3 + \cdots + (5 \times 3^{n-2}) \cdot (2n-3) + (5 \times 3^{n-1}) \cdot (2n-1)$$

,

两式相减得：

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} \\ &= \frac{5}{3} + 2 \cdot (5 \times 3^0 + 5 \times 3^1 + \cdots + 5 \times 3^{n-2}) - (5 \times 3^{n-1})(2n-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{3} + 2 \times \frac{5 - 5 \times 3^{n-1}}{1-3} - (5 \times 3^{n-1})(2n-1)$$

$$= -\frac{10}{3} + (2-2n) \times 5 \times 3^{n-1},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1} = \frac{5}{3} + (n-1) \times 5 \times 3^{n-1}.$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项；错位相减法求和；等比数列求和问题；等比数列求通项问题

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $b_n = 3n + 1$.

(2) $T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$.

【解析】 (1) 由题意知, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5$. 又因为 $a_1 = S_1 = 11$, 所以

$a_n = 6n + 5$. 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d . 可得 $\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 11 = 2b_1 + d \\ 17 = 2b_1 + 3d \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$, 所以 $b_n = 3n + 1$.

(2) 由(1)的解答, 可得 $c_n = \frac{(6n + 6)^{n+1}}{(3n + 3)^n} = 3(n + 1) \cdot 2^{n+1}$. 又由 $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$,

得 $T_n = 3 \times [2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (n + 1) \times 2^{n+1}]$,

$2T_n = 3 \times [2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + (n + 1) \times 2^{n+2}]$, 把它们相减, 得:

$-T_n = 3 \times [2 \times 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1} - (n + 1) \times 2^{n+2}] = -3n \cdot 2^{n+2}$, 所以

$T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和; 等差数列求通项问题

3. 裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差, 在求和时中间的一些项可以相互抵消, 从而求得其和.

常见的拆项公式有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}; \\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \\ \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \\ n \cdot n! &= (n+1)! - n!; \\ \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

11. 已知等差数列前三项为 $a, 4, 3a$, 前 n 项的和为 S_n , $S_k = 420$.

(1) 求 a 及 k 的值.

(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n}$.

【答案】 (1) $a = 2, k = 20$.

$$(2) 1 - \frac{1}{n+1}.$$

【解析】(1) 设该等差数列为 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 = a$ ， $a_2 = 4$ ， $a_3 = 3a$ ，

由已知有 $a + 3a = 2 \times 4$ ，解得 $a_1 = a = 2$ ，公差 $d = a_2 - a_1 = 2$ ，

将 $S_k = 420$ 代入公式 $S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot d$ ，得 $2k + k(k-1) = 420$ ，

即 $k^2 + k - 420 = 0$ ，解得 $k = 20$ （负值舍去），

$\therefore a = 2$ ， $k = 20$ 。

(2) 由(1)得到 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 2n + n(n-1) = n(n+1)$ ，

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{则 } \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列求和问题；等差数列求通项问题；裂项相消法求和

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ ， $2a_1$ ， $a_1 + a_2 + a_3$ 分别是等比数列 $\{b_n\}$ 的首项和第二项。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和。

(3) 求 $\sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【答案】(1) $a_n = n$ ； $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ 。

$$(2) \frac{2n}{n+1}.$$

$$(3) M_n = (2n-2)3^n + 2.$$

【解析】(1) 由已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，记其公差为 d 。

因为 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ ，

所以 $a_2 = 2a_1 - 1 + 1$ ， $a_3 = 2a_2 - 2 + 1$ ，

即 $a_1 = d$ ， $a_2 = d + 1$ ，

解得 $a_1 = d = 1$ ，

所以 $a_n = n$ 。

从而 $b_1 = 2a_1 = 2$ ， $b_2 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$ ，

所以公比 $q = 3$ ，

所以 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ 。

$$(2) S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\begin{aligned}
& \text{所以 } T_n = 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] \\
& = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
& = \frac{2n}{n+1} . \\
(3) & \text{ 因为 } M_n = \sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i = a_1 b_1 + a_3 b_2 + a_5 b_3 + \cdots + a_{2n-3} b_{n-1} + a_{2n-1} b_n \\
& = 2 \cdot 3^0 + 6 \cdot 3^1 + 10 \cdot 3^2 + \cdots + 2(2n-3)3^{n-2} + 2(2n-1)3^{n-1} , \\
& \text{所以 } 3M_n = 2 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \cdots + 2(2n-3)3^{n-1} + 2(2n-1)3^n , \\
& \text{所以 } -2M_n = 2 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \cdots + 4 \cdot 3^{n-1} - 2(2n-1)3^n \\
& = \frac{4 \cdot (1-3^n)}{1-3} - 2 - 2(2n-1)3^n \\
& = (4-4n)3^n - 4 , \\
& \text{所以 } M_n = (2n-2)3^n + 2 .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；等比数列求通项问题；错位相减法求和；裂项相消法求和

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6, a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$.

- (1) 求证: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 3}\right\}$ 为等差数列 .
 (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
 (3) 设 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) a_n = \frac{3(n+1)}{n} .$$

$$(3) \frac{3n}{n+1} .$$

【解析】 (1) 由 $a_{n-1} \cdot a_n - 6a_{n-1} + 9 = 0$, 得 $a_n = 6 - \frac{9}{a_{n-1}}$,

$$\therefore a_{n+1} = 6 - \frac{9}{a_n},$$

$$\text{则 } \frac{1}{a_{n+1} - 3} - \frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{6 - \frac{9}{a_n} - 3} - \frac{1}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3}{3(a_n - 3)} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n - 3}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \frac{1}{a_n - 3} = \frac{1}{a_1 - 3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n}{3},$$

$$\therefore a_n = \frac{3(n+1)}{n} .$$

$$(3) b_n = \frac{a_n}{(n+1)^2} = \frac{\frac{3(n+1)}{n}}{(n+1)^2} = \frac{3}{n(n+1)} = 3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{则 } T_n = 3 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3n}{n+1} .$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是递增的等比数列, 且 $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 3a_3 - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = \frac{2^{a_n}}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$.

(2) $1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

【解析】 (1) $\because \{a_n\}$ 等差, $\{b_n\}$ 等比,

$\therefore$ 设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 公比为 q ,

则有 $a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

从而 $b_2 = 2a_2 \Leftrightarrow b_1 q = 2(a_1 + d)$,

$2q = 2(1+d)$ ①,

$b_3 = 3a_3 - 1 \Leftrightarrow b_1 q^2 = 3(a_1 + 2d) - 1$,

$2q^2 = 3(1+2d) - 1$ ②,

由①②可解得: $\begin{cases} d=0 \\ q=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=1 \\ q=2 \end{cases}$,

$\because \{b_n\}$ 递增,

$\therefore d = 1$, $q = 2$,

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = n$,

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^n$.

(2) $c_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$,

$\therefore S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \\ &= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题; 等差数列求通项问题; 裂项相消法求和

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - n$.

(1) 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) 证明见解析, $a_n = 2^n - 1$.

(2) $T_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

【解析】(1) 由 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 得 $a_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - n) - (2a_{n-1} - n + 1)$, 即 $a_n = 2a_{n-1} + 1$,

所以 $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$,

又因为 $a_1 + 1 = 2$,

所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以 $a_n + 1 = 2^n$, $a_n = 2^n - 1$.

(2) 由 (1) 知, $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}} = \frac{2n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$,

则 $T_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}$.

【标注】【知识点】裂项相消法求和

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 2$, $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

(2) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

(3) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$, 证明: $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n < \frac{1}{32}$.

【答案】(1) $a_n = 2n$.

(2) $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(3) 证明见解析 .

【解析】(1) 由 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ ①

得 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n = S_{n-1} - 1 + (n-1)n$ ②

① - ②, 得 $na_{n+1} - (n-1)a_n = a_n + 2n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2(n \geq 2)$,

当 $n = 1$ 时, $a_2 = S_1 + 1 \times 2$,

所以, $a_2 = a_1 + 2$,

所以对一切正整数 n , 有 $a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 故 $a_n = 2n$.

(2) 由 (1) 得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$,

所以 $T_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$, ①

两边同乘以 $\frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$, ②

① - ②, 得 $\frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$,

整理得 $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(3) 由 (1) 知, $b_n = \frac{1}{2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2)} = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$,

所以，

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{32} - \frac{1}{16(n+1)(n+2)} < \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；错位相减法求和

17. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列。

已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和。

(3) 求 $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{(a_i + 1)(a_{i+1} + 1)}$ 。

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(2) $n \cdot 2^n - 2^n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(3) $\frac{2^n - 1}{2^{n+1} + 2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【解析】 (1) $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$\therefore a_1 q^2 = a_1 q + 2 \Rightarrow q^2 - q - 2 = 0,$$

$$\therefore q = 2 \text{ 或 } q = -1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$a_4 = b_3 + b_5 = 2b_4 = 8 \Rightarrow b_4 = 4,$$

$$a_5 = b_4 + 2b_6 = 4 + 2b_6 = 16 \Rightarrow b_6 = 6,$$

$$\therefore d = \frac{b_6 - b_4}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1,$$

$$\therefore b_n = b_4 + (n - 4)d = 4 + n - 4 = n (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 由(1)知 $a_n b_n = n \cdot 2^{n-1}$ ，令数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，

$$\therefore T_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$$

$$2T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n,$$

$$\therefore -T_n = 1 \times 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n,$$

$$\therefore -T_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - n \cdot 2^n = 2^n - 1 - n \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = n \cdot 2^n - 2^n + 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} &= \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1} + 1} - \frac{1}{2^n + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n+1} + 1}, \\
&\therefore \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(a_i + 1)(a_{i+1} + 1)} \\
&= \frac{a_1}{(a_1 + 1)(a_2 + 1)} + \frac{a_2}{(a_2 + 1)(a_3 + 1)} + \cdots + \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)} \\
&= \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{a_2 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} - \frac{1}{a_3 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n+1} + 1} \\
&= \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{1}{a_{n+1} + 1} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \\
&= \frac{2^n - 1}{2^{n+1} + 2} (n \in \mathbf{N}^*).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；裂项相消法求和；错位相减法求和

18. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于 0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ， $a_4 = b_3 + b_5$ ， $a_5 = b_4 + 2b_6$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

① 求 T_n 。

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$ ， $b_n = n$ 。

(2) ① $T_n = 2^{n+1} - n - 2$ 。

② 证明见解析。

【解析】 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q ，

由 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，可得 $q^2 - q - 2 = 0$ ，

$\because q > 0$ ，可得 $q = 2$ ，故 $a_n = 2^{n-1}$ 。

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，由 $a_4 = b_3 + b_5$ ，

可得 $b_1 + 3d = 4$ ，由 $a_5 = b_4 + 2b_6$ ，

可得 $3b_1 + 13d = 16$ ，从而 $b_1 = 1$ ， $d = 1$ ， $\therefore b_n = n$ 。

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n$ 。

(2) ① 由 (1) 得， $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ ，
 $\therefore T_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - n = \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2$ 。

② $\frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(2^{k+1} - k - 2 + k + 2)k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k \cdot 2^{k+1}}{k \cdot 2^{k+1}} = \frac{2^{k+2}}{k+2} - \frac{2^{k+1}}{k+1}$ ，

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

19. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n > 0$ 且 $a_1 a_3 = 36$, $a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $S_n + 1 = 3^{b_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 及数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

【答案】(1) $a_n = 2 \times 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) T_n = \frac{(2n-1) \times 3^n}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$(3) P_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{4 \times 3^n + 2}.$$

【解析】(1) 由题意得: $a_3 + a_4 = 9(a_1 + a_2)$, 可得 $(a_1 + a_2)q^2 = 9(a_1 + a_2)$, $q^2 = 9$,

由 $a_n > 0$, 可得 $q = 3$, 由 $a_1 a_3 = 36$, 可得 $a_1 a_1 q^2 = 36$, 可得 $a_1 = 2$,

可得 $a_n = 2 \times 3^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

$$(2) \text{ 由 } a_n = 2 \times 3^{n-1}, \text{ 可得 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1,$$

由 $S_n + 1 = 3^{b_n}$, 可得 $3^n - 1 + 1 = 3^{b_n}$, 可得 $b_n = n$,

可得 $\{a_n b_n\}$ 的通项公式: $a_n b_n = 2n \times 3^{n-1}$,

$$\text{可得 } T_n = 2 \times 3^0 + 2 \times 2 \times 3^1 + 2 \times 3 \times 3^2 + \cdots + 2 \times (n-1) \times 3^{n-2} + 2 \times n \times 3^{n-1} \text{ ①},$$

$$3T_n = 2 \times 3^1 + 2 \times 2 \times 3^2 + 2 \times 3 \times 3^3 + \cdots + 2 \times (n-1) \times 3^{n-1} + 2 \times n \times 3^n \text{ ②},$$

①-②可得

$$-2T_n = 2 + 2 \times \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} - 2 \times n \times 3^n = 2 + 3^n - 3 - 2n \times 3^n = (1-2n) \times 3^n - 1,$$

$$\text{可得 } T_n = \frac{(2n-1) \times 3^n}{2} + \frac{1}{2}.$$

$$(3) \text{ 由 } c_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}, \text{ 可得}$$

$$c_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{(2 \times 3^{n-1} + 1)(2 \times 3^n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3^{n-1} + 1} - \frac{1}{2 \times 3^n + 1} \right),$$

$$\text{可得 } P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{2 \times 3^{n-1} + 1} - \frac{1}{2 \times 3^n + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \times 3^n + 1} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4 \times 3^n + 2}.$$

【标注】【知识点】错位相减法求和; 裂项相消法求和

数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 前 n 项和 $S_n(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$, $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$, $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n(n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 若 $c_n = \frac{(T_{n+1} - b_{n+1})b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}$, 记 $R_n = \sum_{n=1}^n C_n$, 求 R_n 的取值范围.

【答案】 (1) $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = n - 1$.

(2) ① $T_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}$.

② $R_n \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

【解析】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q > 0)$,

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$, 可得 $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1 q} + 4 \end{cases}$,

整理得 $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} - 2 = 0$, 解得 $q = -1$ (舍) 或 $q = \frac{1}{2}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^n}$,

设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$, $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$,

可得 $\begin{cases} \frac{1}{8} = \frac{1}{2(b_1 + 4d)} \\ \frac{1}{16} = \frac{1}{3b_1 + 16d} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} b_1 + 4d = 4 \\ 3b_1 + 16d = 16 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b_1 = 0 \\ d = 1 \end{cases}$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n - 1$.

(2) ① 由等比数列的前 n 项和公式, 可得 $S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$,

所以 $T_n = (1 + 1 + \cdots + 1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = n - 1 + \frac{1}{2^n}$.

② 由①, 可得:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(T_{n+1} - b_{n+1})b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}} = \frac{\left(n + \frac{1}{2^{n+1}} - n\right) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{(n+2)}{n \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}, \end{aligned}$$

所以 $\{c_n\}$ 的前 n 项和:

$$\begin{aligned} R_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n \\ &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{易知 } \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{2}, \\ & \text{又 } \because R_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \text{ 是关于 } n \text{ 的单调递增函数,} \\ & \therefore R_n \geq R_1 = \frac{3}{8}. \\ & \text{从而 } R_n \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和

21. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明：对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

【答案】(1) $a_n = 2n$.

(2) 见解析

【解析】(1) 由 $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$,

$$\text{得 } [S_n - (n^2 + n)](S_n + 1) = 0.$$

由于数列 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n > 0, S_n = n^2 + n$.

于是 $a_1 = S_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1) = 2n.$$

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 2n$.

(2) 由于 $a_n = 2n$, $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$,

$$\text{则 } b_n = \frac{n+1}{4n^2(n+2)^2} = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right].$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{16} \left[1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] \\ &< \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) = \frac{5}{64}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用 S_n 与 a_n 的关系求通项; 裂项相消法求和

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$.

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 记 $c_n = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $b_n = n$.

$$(2) S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

$$(3) -\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$,

$$\text{可得} \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1,$$

设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 公差为1, 首项为1,

$$\therefore b_n = n.$$

(2) 易得 $a_n = n \cdot 2^n$, 其前 n 项和: $S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \cdots \textcircled{1}$,

$$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1} \cdots \textcircled{2},$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 可得: } S_n = -1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^n + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

$$\begin{aligned} (3) c_n &= \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)2^n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)2^{n+1}} = \frac{(-1)^n(n^2 + 4n + 2)}{n \cdot (n+1)2^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n(n^2 + n + 2(n+1) + n)}{n \cdot (n+1)2^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + (-1)^n \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right), \\ T_n &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{-1}{1 \cdot 2^1} - \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} \right) + \left(\frac{(-1)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(-1)^3}{3 \cdot 2^3} \right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right) \right] \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{(n+4)(-1)^{n+1}}{3(n+1) \cdot 2^{n+1}}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和; 分组法求和; 错位相减法求和

4. 简单的分组求和

分组求和的原则

数列求和应从通项入手. 有的数列, 从通项上看, 既不是等差数列, 也不是等比数列, 但将数列适当拆开, 可分为几个等差、等比数列或常见的数列, 对这类数列求和, 应先拆开, 然后分别求和, 再将其合并即可.

23. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_7 = -23$, $a_3 + a_8 = -29$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_n = -3n + 2$.

$$(2) S_n = \frac{n(3n-1)}{2} + 2^n - 1.$$

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差是 d .

依题意得 $a_3 + a_8 - (a_2 + a_7) = 2d = -6$, 解得 $d = -3$.

所以 $a_2 + a_7 = 2a_1 + 7d = -23$, 解得 $a_1 = -1$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -3n + 2$.

(2) 由数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列,

得 $a_n + b_n = 2^{n-1}$, 即 $-3n + 2 + b_n = 2^{n-1}$,

所以 $b_n = 3n - 2 + 2^{n-1}$.

所以 $S_n = [1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)] + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$

$$= \frac{n(3n-1)}{2} + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$$

$$= \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$= \frac{n(3n-1)}{2} + 2^n - 1.$$

【标注】【知识点】分组法求和

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, $a_1 \cdot a_4 = 8$, $a_2 + a_3 = 6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$.

$$(2) T_n = 2^n - 1 + \frac{n^2 + n}{2}.$$

【解析】(1) 由 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$ 及 $a_2 + a_3 = 6$ 得 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_3 = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = 4 \end{cases}$ (舍)

所以 $\frac{a_3}{a_2} = q = 2$, $a_1 = 1$.

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$.

(2) 由(1)得 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1} = 2^{n-1} + n$.

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{(1+n)n}{2}$$

$$= 2^n - 1 + \frac{n^2 + n}{2}.$$

【标注】【知识点】分组法求和

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = b_2 = 2$, $b_{n+1}b_n = 2^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】 (1) $a_n = n, n \in \mathbf{N}^*$; $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(2) $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + \frac{n+2}{2^n}$.

【解析】 (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{n^2+n}{2}$,

当 $n=1$ 时, $S_1 = \frac{1+1}{2} = 1$, 所以 $a_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2}$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2+n}{2} - \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2}$
 $= \frac{n^2+n-n^2-1+2n-n+1}{2} = \frac{2n}{2} = n$;

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 也满足上式,

所以 $a_n = n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = n, n \in \mathbf{N}^*$;

因为 $b_{n+1}b_n = 2^{n+1}$, 则当 $n \geq 2$ 时, $b_nb_{n-1} = 2^n$,

因为 $b_1 = b_2 = 2$, 所以 $b_n \neq 0$.

所以 $\frac{b_{n+1}b_n}{b_nb_{n-1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$, 即 $b_{n+1} = 2b_{n-1} (n \geq 2)$, 又 $b_1 = b_2 = 2$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的奇数项和偶数项分别是以2为首项, 2为公比的等比数列, 所以

$b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(2) 由(1)可知, $a_i = i, b_{2i-1} = 2^{\frac{2i-1+1}{2}} = 2^{\frac{2i}{2}} = 2^i, b_{2i} = 2^{\frac{2i}{2}} = 2^i$,

所以 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) = \sum_{i=1}^n i \left(2^i - \frac{1}{2^i} \right) = \sum_{i=1}^n i \cdot 2^i - \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}$;

设 $M_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \cdots + (n-1) \cdot x^{n-1} + n \cdot x^n (x \neq 0, 1)$, ①

$xM_n = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + \cdots + (n-1) \cdot x^n + n \cdot x^{n+1}$, ②

由①-②可得: $(1-x)M_n = x + x^2 + \cdots + x^n - n \cdot x^{n+1} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^{n+1}$,

所以 $M_n = \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{n \cdot x^{n+1}}{1-x} = \frac{x - x^{n+1} - n(1-x)x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{x + (nx - n - 1) \cdot x^{n+1}}{(1-x)^2}$,

所以 $\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = \frac{2 + (2n - n - 1) \cdot 2^{n+1}}{(1-2)^2} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$,

所以 $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{n}{2} - n - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

所以 $\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i - \sum_{i=1}^n i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 - 2 + \frac{n+2}{2^n} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + \frac{n+2}{2^n}$,

所以 $\sum_{i=1}^n a_i \left(b_{2i-1} - \frac{1}{b_{2i}} \right) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + \frac{n+2}{2^n}$.

【标注】【知识点】错位相减法求和；分段数列问题；利用 S_n 与 a_n 的关系求通项

5. 并项求和

并项求和的原则

并项求和法对一些特殊的数列来说，将某些项合并在一起就具有某种特殊的性质，因此，在求数列的前 n 项和时，可将这些项放在一起先求和，再求整体的和。

26. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n - 2)$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = (\quad)$ 。

A. 15

B. 12

C. -12

D. -15

【答案】A

【解析】 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = -1 + 4 - 7 + 10 + \dots + (-1)^{10} \cdot (3 \times 10 - 2)$
 $= (-1 + 4) + (-7 + 10) + \dots + [(-1)^9 \cdot (3 \times 9 - 2) + (-1)^{10} \cdot (3 \times 10 - 2)] = 3 \times 5 = 15$ 。故选A。

【标注】【知识点】并项求和

【素养】数学运算

27. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3n - 1$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $b_n = (-1)^{n+1}a_n$ ，则 $T_{19} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】29

【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3n - 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，

$$b_n = (-1)^{n+1}a_n,$$

T_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，

$$T_{19} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{17} - a_{18} + a_{19}$$

$$= 2 - 5 + 8 - 11 + \dots + 50 - 53 + 56$$

$$= -3 \times 9 + 56$$

$$= -27 + 56$$

$$= 29,$$

故 $T_{19} = 29$ 。

【标注】【知识点】并项求和

28. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$, $S_6 = 63$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

【答案】 (1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $2n^2$

【解析】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由已知有 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$,

解得, $q = 2$, $q = -1$,

又由 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 63$, 可知 $q = -1$ (舍去),

所以 $q = 2$, 即 $\frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 63$, 解得 $a_1 = 1$,

所以 $a_n = 2^{n-1}$.

(2) 题意得 $b_n = \frac{1}{2}(\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1}) = \frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1} + \log_2 2^n) = n - \frac{1}{2}$,

即数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为1的等差数列.

设数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则

$$T_{2n} = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \cdots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = \frac{2n(b_1 + b_{2n})}{2} = 2n^2$$

【标注】【知识点】并项求和