

02数列求通项习题

1. 利用项与和的关系

1. 2017~2018学年湖北武汉武昌区华中师大一附中高三上学期期中文科第17题12分 ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\{b_n\}$ 为等差数列 , 且 $a_1 = b_1$, $a_2(b_2 - b_1) = a_1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式 .

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $b_n = 2n - 1$.

(2) $T_n = 3 + (2n - 3) \cdot 2^n$.

【解析】 (1) 当 $n = 1$ 时 , $a_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时 , $a_n = S_n - S_{n-1} = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$,

经验证当 $n = 1$ 时 , 此式也成立 , 所以 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$,

从而 $b_1 = a_1 = 1$, $b_2 - b_1 = \frac{a_1}{a_2} = 2$,

又因为 $\{b_n\}$ 为等差数列 , 所以公差 $d = 2$,

$\therefore b_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$,

故数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式分别为 : $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $b_n = 2n - 1$.

(2) 由 (1) 可知 $c_n = \frac{2n - 1}{\frac{1}{2^{n-1}}} = (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$,

所以 $T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n - 1) \cdot 2^{n-1}$ ① ,

① $\times 2$ 得 $2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n - 3) \cdot 2^{n-1} + (2n - 1) \cdot 2^n$ ② ,

① $-$ ② 得 : $-T_n = 1 + 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n - 1) \cdot 2^n$,

$= 1 + 2 \frac{2(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (2n - 1) \cdot 2^n$

$= 1 + 2^{n+1} - 4 - (2n - 1) \cdot 2^n = -3 - (2n - 3) \cdot 2^n$.

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 3 + (2n - 3) \cdot 2^n$.

【标注】 【知识点】 错位相减法求和

2. 2017~2018学年天津河西区天津市实验中学高三上学期期中理科第17题12分 ★★★

正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$, 求

(1) $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的取值范围 .

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$.

(2) $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$,

当 $n = 1$ 时, 有 $2\sqrt{S_1} = a_1 + 1 = 2\sqrt{a_1}$, 解可得 $a_1 = 1$,

将 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ 两边平方得 $4S_n = (a_n + 1)^2$ ①,

$n \geq 2$ 时, $4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2$ ②,

① - ② 可得, $4a_n = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2$,

变形可得: $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$,

又由数列 $\{a_n\}$ 为正数数列, 则 $(a_n + a_{n-1}) > 0$,

则有 $(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,

$\therefore$ 有 $a_n = 2n - 1$.

(2) $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,
则 $T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$,
则 $T_n < \frac{1}{2}$,

易知 T_n 随着 n 的增大而增大,

则当 $n = 1$, 取最小值 $T_n = \frac{1}{3}$, 则 $T_n \geq \frac{1}{3}$,

故 $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】裂项相消法求和

2. 累加法求数列通项

3. 2016~2017学年北京海淀区高三上学期期中文科第16题13分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n - b_{n-1} = a_n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), 且 $b_1 = b_3 = 1$.

(1) 求 a_1 的值.

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_1 = -3$

(2) $b_n = n^2 - 4n + 4$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

【解析】 (1) 因为数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n - b_{n-1} = a_n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$),

所以 $b_2 - b_1 = a_2 = -1$,

又因为 $b_1 = 1$, 所以 $b_2 = 0$,

所以 $a_3 = b_3 - b_2 = 1$,

又因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 ,

所以 $d = a_3 - a_2 = 1 - (-1) = 2$,

所以 $a_1 = a_2 - d = -1 - 2 = -3$.

(2) 由 (1) 可知 , 数列 $\{a_n\}$ 是以 -3 为首项 , 2 为公差的等差数列 ,

所以 $a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 5$,

由条件 , 当 $n \geq 2$ 时 , $b_n - b_{n-1} = 2n - 5$,

$$b_{n-1} - b_{n-2} = 2(n-1) - 5$$

...

$$b_2 - b_1 = -1$$

将上述各等式相加整理得 ,

$$b_n - b_1 = \frac{-1 + (2n-5)}{2} \cdot (n-1) = n^2 - 4n + 3 ,$$

所以 $b_n = b_1 + n^2 - 4n + 3 = n^2 - 4n + 4$ ($n \geq 2$) ,

当 $n = 1$ 时 , $b_1 = 1$ 也满足上式 ,

所以 $b_n = n^2 - 4n + 4$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

4. 2018~2019学年10月天津河西区天津市新华中学高二上学期月考第12题 ★★★

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{n^2 + n}{2}$

【解析】 $\because a_{n+1} - a_n = n + 1$,

$$a_n - a_{n-1} = n ,$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = n - 1 ,$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = n - 2 ,$$

.....

$$a_3 - a_2 = 3 ,$$

$$a_2 - a_1 = 2 ,$$

$\therefore$ 累加为 $a_n - a_1 = 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

$$= \frac{(2+n)(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2} ,$$

$$\therefore a_n = \frac{n^2 + n}{2} .$$

【标注】【知识点】递推数列与递推方法

5. ★★

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

【答案】 $a_n = 3^n$.

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

6. ★

已知 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求通项公式.

【答案】 $a_n = n^2 - n + 1$.

【解析】 $\because a_{n+1} = a_n + 2n$,

$$\therefore a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2)$$

...

$$a_2 - a_1 = 2 \cdot 1$$

$$\text{累加得 } a_n - a_1 = 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

$$\therefore a_n = n^2 - n + 1.$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

7. 2010~2011学年北京东城区高三上学期期中理科普通校第17题13分 ★★★

已知 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列 ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_2 = 3$ 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_{n+1} = b_n + \frac{4}{3}a_n$ 且 $b_1 = 1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项.

【答案】 (1) $a_n = \frac{3}{2}n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

(2) $b_n = n^2 - n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【解析】 (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d \neq 0$,

$$\text{由 } a_2 = 3 \text{ 可得 } a_1 + d = 3$$

$$\text{由 } a_1, a_3, a_9 \text{ 成等比数列可得 } (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 8d)$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{3}{2}n \text{ } (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$(2) \quad b_{n+1} = b_n + 2n$$

$$\text{所以有 } b_n - b_{n-1} = 2(n-1)$$

$$b_{n-1} - b_{n-2} = 2(n-2)$$

...

$$b_2 - b_1 = 2 \times 1$$

$$\text{由叠加法可得 } b_n - b_1 = 2(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

$$\text{所以 } b_n = n^2 - n + 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

【标注】【知识点】利用累加法求数列通项公式问题

3. 累乘法求数列通项

8. ★★

已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $n(a_{n+1} - a_n) = 2a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} .$

【解析】 将已知条件变形为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$, 之后对 n 赋值之后累乘得到:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdots \frac{3}{1} = \frac{n(n+1)}{2}, \therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

9. 2012年高考真题大纲卷文科第18题 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 前 n 项和 $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$.

(1) 求 a_2, a_3 ;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 (1) $a_2 = 3; a_3 = 6$.

(2) $a_n = \frac{n(n+1)}{2} .$

【解析】 (1) 由 $S_2 = \frac{4}{3}a_2$, 得 $3(a_1 + a_2) = 4a_2$, 解得 $a_2 = 3a_1 = 3$;

由 $S_3 = \frac{5}{3}a_3$ 得 $3(a_1 + a_2 + a_3) = 5a_3$, 解得 $a_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_2) = 6$.

(2) 由题设知 $a_1 = 1$.

$$\text{当 } n > 1 \text{ 时, 有 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3}a_n - \frac{n+1}{3}a_{n-1},$$

$$\text{整理得 } a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1} .$$

于是 $a_1 = 1$,

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1 ,$$

$$a_3 = \frac{4}{2}a_2 ,$$

.....

$$a_{n-1} = \frac{n}{n-2}a_{n-2} ,$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1} ,$$

将以上 n 个等式两端分别相乘, 整理得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

综上, $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

【标注】【知识点】列表

10. ★★

数列 $\{a_n\}$ 中已知 $a_1 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

【答案】 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【方法】累乘法

11. ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+3}{n+1}$, 其中 $n \in \mathbf{N}_+$, 求 a_n .

【答案】 $a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{3}$.

【解析】 $\because a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+3}{n+1}$,
 $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n+1}$,

由此可得:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} ,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{3} ,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{6}{4} ,$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+2}{n} ,$$

将上式相乘, 得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{5} \cdots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2 \times 3}$,

$$\text{因此, } a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{3}.$$

【标注】【知识点】利用累乘法求数列通项公式问题

4. 配凑法/待定系数法求解

12. ★★

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求 a_n .

【答案】 $a_n = 4^{n-1} + n$.

【解析】 $a_n = 4^{n-1} + n$.

【标注】【知识点】构造等比数列求通项

13. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且满足 $a_{n+1} - 2 = 2a_n - 4$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

【答案】 $a_n = 2^{n-1} + 2$

【解析】 略.

【标注】【知识点】通项公式

【素养】数学运算

14. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$, 则 $a_2 =$ _____, $a_{10} =$ _____.

【答案】 3; 1023

【解析】 $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$, 可以推断 $a_n = 2^n - 1$,
 $a_{10} = 1023$.

【标注】【知识点】根据递推关系求数列的某一项 (非周期类)

5. 除幂变换求数列通项

15. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】 $a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n$

【解析】 $\because a_{n+1} = 3a_n + 3 \cdot 2^n$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{2^n}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

$$\text{又 } \because b_{n+1} + 3 = \frac{3}{2}(b_n + 3)$$

$$\therefore \frac{b_{n+1} + 3}{b_n + 3} = \frac{3}{2}$$

$\{b_n + 3\}$ 为以 $b_1 + 3 = \frac{a_1}{2^1} + 3 = 4$ 为首项，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列。

$$\therefore b_n + 3 = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n .$$

【标注】【知识点】利用待定系数法求数列通项公式问题

6. 倒数变换求数列通项

16. 2018~2019学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中（特长班）第12题4分 ★★

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的第 6 项是 _____ .

【答案】 $\frac{1}{16}$

【解析】 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n}$,

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3 ,$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 为首项为 $\frac{1}{a_1} = 1$, 公差为 3 的等差数列 .

$$\frac{1}{a_n} = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

$$a_n = \frac{1}{3n - 2}$$

$$a_6 = \frac{1}{16} .$$

【标注】【知识点】倒数型递推求通项

7. 对数变换求数列通项

17. ★★

已知 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2$, 求 a_n .

【答案】 $a_n = 3^{2^{n-1}}$

【解析】 $\lg^{a_{n+1}} = 2\lg^{a_n}$, $\lg^{a_n} = \lg^3 2^{n-1}$, $a_n = 3^{2^{n-1}}$.

【标注】【知识点】对数型递推求通项