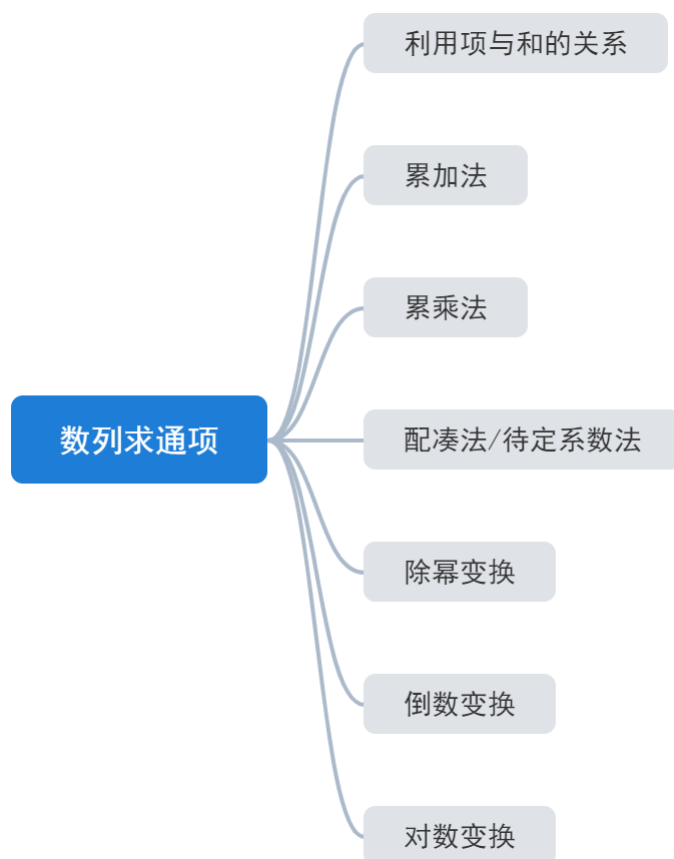


02数列求通项

题型梳理



1. 利用项与和的关系

已知 S_n , 求 a_n 步骤

由前 n 项和 S_n , 求通项公式的主要步骤有 four 步 :

- ① 令 $n = 1$ 确定 a_1 ;
- ② 由 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 确定 a_n ;
- ③ 检验②中 $n = 1$ 时的结果是否等于 a_1 ;
- ④ 写出通项公式 (若③中 a_1 , 符合 , 则合着写 ; 若不符 , 则分段写).

利用 S_n 的表达式求解数列通项

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n(n+1) + 2$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的 , 前项 n 和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 3n - 1$, 则 a_n 的通项为 _____ .

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_n + 1}{n} = 2n + 1$, 则 $a_1 + a_7 =$ _____ .

|| 根据 S_n 与 a_n 的关系确定数列通项

4. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2a_n + n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____ .

5. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 . 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.

求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

6. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2S_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数 , 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3) (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为正数的等差数列 , 且 $b_2 = 5$, b_1 , b_3 , b_{11} 成等比数列 .

求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

8. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2 = 4$, $a_{n+1}^2 = 6S_n + 9n + 1$, 各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 足 $b_1 = a_1$, $b_3 = a_2$.

求证 $\{a_n\}$ 为等差数列 , 并求数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 通项公式 .

|| 将 a_n 化为 S_n 求解 S_n 从而确定 a_n

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + 2S_n \cdot S_{n-1} = 0 (n \geq 2)$, 且 $a_1 = \frac{1}{2}$, 求 a_n .

10. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \geq 2$ 时 , 满足 $(a_n - S_{n-1})^2 = S_n S_{n-1}$, 且 $a_1 = 1$.

求证 : 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列 .

11. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n =$ _____ .

|| 构造新数列根据新数列和求解数列通项

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的满足 $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-1}a_n = (2n - 3) \cdot 2^n + 3$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 4a_2 + 4^2a_3 + \cdots + 4^{n-1}a_n = \frac{n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_3 + \cdots + \frac{1}{2n-1}a_n = n$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

2. 累加法求数列通项

 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$

下面我们来推导具有上述形式的数列的通项公式：

将递推公式变形为 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ，对 n 进行连续赋值，可以得到：

$$a_n - a_{n-1} = f(n-1),$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2),$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = f(n-3),$$

.....

$$a_3 - a_2 = f(2),$$

$$a_2 - a_1 = f(1).$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加，得到：

左边：

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_n - a_1$$

右边：

$$f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\text{故 } a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(i), \text{ 即 } a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i),$$

若 $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出，那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ， $a_1 = 1$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ，且 $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$ ($n \geq 2$)，求 a_n 。

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2 \times 3^n + 1$ ， $a_1 = 3$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$ ($n \geq 2$)， $a_n =$ _____。

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + 2n}$ ，其中 $a_1 = 1$ ，求 $\{a_n\}$ 通项公式。

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ，则 $a_5 =$ ()。

A. $2 + \ln 3$

B. $2 + \ln 5$

C. $3 + \ln 5$

D. $3 + \ln 2$

22. 若数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ，则 $\{a_n\}$ 的通项是 _____。

3. 累乘法求数列通项

 形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

将递推公式变形为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$, 对 n 进行连续赋值 , 可以得到 :

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1) ,$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2) ,$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = f(n-3) ,$$

.....

$$\frac{a_3}{a_2} = f(2) ,$$

$$\frac{a_2}{a_1} = f(1) .$$

将上面 $n-1$ 个等式左右分别叠加 , 得到 :

左边 :

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_1} .$$

右边 :

$$f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \cdots \cdot f(2) \cdot f(1) = \prod_{i=1}^{n-1} f(i) .$$

故 $\frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f(i)$, 即 $a_n = a_1 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} f(i)$,

若 $\prod_{i=1}^{n-1} f(i)$ 部分可以求出 , 那么就可以得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

23. 数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$, 则 $a_n =$ _____ .

24. 已知 : $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{2n-1}{2n+1} a_{n-1} (n \geq 2)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 .

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+3}{n+1}$, 其中 $n \in \mathbf{N}_+$, 求 a_n .

26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 : $a_1 = 1$, $2^{n-1} a_n = a_{n-1} (n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

4. 配凑法/待定系数法求解



$$a_{n+1} = pa_n + q$$

27. 已知数列满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} + 2a_n = 2$, 求 a_n .

28. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____ .

29. 在数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 .



$$a_{n+1} = pa_n + qn$$

30. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + n - 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____ .



$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

31. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

(1) 求证: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

32. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$,
数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是否是等比数列;

5. 除幂变换求数列通项

 $a_{n+1} = pa_n + r \cdot q^n$ ($p, q, r \in \mathbf{R}$ 且满足 $pqr(p-1) \neq 0$)

33. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ____.
34. 已知 $a_1 = 2, a_{n+1} = 4a_n + 2^{n+1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6. 倒数变换求数列通项

 $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n + r}$ ($p, q, r \in \mathbf{R}$ 且满足 $pqr \neq 0$)

35. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
36. 已知 $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{2a_n}{2a_n + 1}$, 求 a_n .
37. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_4 =$ ____.

7. 对数变换求数列通项

 $a_{n+1}^p = a_n^q$ ($a_n > 0$ 且 $a_n \neq 1, pq \neq 0$)

38. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$ 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 ____.
39. 已知 $a_1 = e^2, a_{n+1}^7 = a_n^5$, 求 a_n .
40. $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 6$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.