

01等差数列与等比数列习题

1. 等差数列的通项与求和

1. 2018~2019学年北京东城区北京市第一七一中学高二上学期期中第2题5分 ★★

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 若 $a_1 + a_2 = 5$, $a_3 + a_4 = 9$, 则 S_{10} 的值为 () .

- A. 55 B. 60 C. 65 D. 70

【答案】 C

【解析】 等差数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 + a_2 = 5$, $a_3 + a_4 = 9$,

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + d = 5 \\ 2a_1 + 5d = 9 \end{cases} ,$$

解得 $a_1 = 2$, $d = 1$,

$$\therefore S_{10} = 10 \times 2 + \frac{10 \times 9}{2} \times 1 = 65 .$$

故选 C .

【标注】 【知识点】 利用方程组求等差数列；等差数列求和问题

【素养】 数学运算

2. 2016~2017学年湖北孝感孝南区湖北省孝感市高级中学高一下学期期末文科八校联考第5题5分 ★★

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列 , 其公差为 -2 , 且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项 , S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , $n \in \mathbf{N}^*$, 则 S_{10} 的值为 () .

- A. -110 B. -90 C. 90 D. 110

【答案】 D

【解析】 因为 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项 , 公差为 -2 ,

$$\text{所以 } a_7^2 = a_3 \cdot a_9 ,$$

$$\text{所以 } a_7^2 = (a_7 + 8)(a_7 - 4) ,$$

解得 $a_7 = 8$,

所以 $a_1 = 20$,

$$\text{所以 } S_{10} = 10 \times 20 + \frac{10 \times 9}{2} \times (-2) = 110 , \text{ 故选 D .}$$

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题；等比中项

3. 2017~2018学年10月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考理科第13题5分 ★★★

已知等差数列 $\{a_n\}$, 若 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_3 a_6$, $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_3 a_5$, 且 $S_{2n} = 200$, 则公差 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0或6

【解析】 若 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_3 a_6$ ① ,

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_3 a_5 \text{ ② ,}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{得 , } nd = a_3 d .$$

(1) 若 $d = 0$ 时 , 显然 $a_n > 0$,

$$\text{则 } a_3 \cdot a_6 = a_1^2 = 100 ,$$

$$\text{所以 } a_1 = 10 , S_{2n} = 200 = 2n \cdot a_1 ,$$

得 $n = 10$ 为整数 , 所以成立 .

(2) 若 $d \neq 0$, 则 $n = a_3$,

$$\text{所以 } n \cdot (a_5 + a_6) = 200 ,$$

$$\text{又 } S_{2n} = 200 = n \cdot (a_1 + a_{2n}) ,$$

$$\therefore a_5 + a_6 = a_1 + a_{2n} ,$$

$$\therefore 2n = 10 , n = 5 ,$$

$$\text{所以 } a_3 = 5 , S_{10} = 5(a_3 + a_5) = 200 ,$$

$$\text{得 } a_8 = 35 ,$$

$$\therefore d = \frac{a_8 - a_3}{5} = 6 ,$$

综上 , $d = 0$ 或 6 .

【标注】 【知识点】等差数列的概念与通项公式

4. 2015~2016学年北京通州区潞河中学高一下学期期中第5题5分 ★★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 $a_3 + a_9 = a_{10} - a_8$, 若 $a_m = 0$, 则 $m = (\quad)$.

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】 B

【解析】 由等差数列的性质可得 : $a_2 + a_{10} = a_{10} - a_8$,

$$\therefore a_2 + a_8 = 0 ,$$

$$\therefore 2a_5 = 0 ,$$

$$\therefore m = 5 .$$

【标注】 【知识点】等差数列角标和性质的应用

2. 等差数列的性质

5. 2015~2016学年10月辽宁沈阳于洪区辽宁省实验中学分校高二上学期月考理科第2题5分 ★

等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_3 + a_6 + a_9 = 27$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项的和 S_9 等于 () .

- A. 66 B. 99 C. 144 D. 297

【答案】 B

【解析】 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$,
 $a_3 + a_6 + a_9 = 27$,
 $3a_4 = 39, 3a_6 = 27$,
 $a_4 = 13, a_6 = 9$,
 $S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \frac{9}{2}(a_4 + a_6) = \frac{9}{2}(13 + 9) = 99$.

【标注】 【知识点】 等差数列求和问题

6. 2020~2021学年10月四川攀枝花东区攀枝花市第三高级中学高三上学期周测C卷文科第8题5分 ★★

已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其前 n 项和分别为 S_n , T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{n+3}$, 则 $\frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}} =$ () .

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{37}{8}$ C. $\frac{79}{14}$ D. $\frac{149}{24}$

【答案】 D

【解析】 由题意知 $\frac{a_2 + a_{20}}{b_7 + b_{15}} = \frac{a_1 + a_{21}}{b_1 + b_{21}}$
 $= \frac{\frac{21}{2}(a_1 + a_{21})}{\frac{21}{2}(b_1 + b_{21})}$
 $= \frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{7 \times 21 + 2}{21 + 3} = \frac{149}{24}$.
故选: D.

【标注】 【知识点】 等差数列的性质及应用; 等差数列前 n 项和的性质

7. 2017~2018学年10月山东泰安新泰市新泰市第二中学高二上学期月考文科第13题5分 ★★

等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 、 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n-1}{2n+3}$, 则 $\frac{a_8}{b_8} =$ _____ .

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】 $\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$,

$$\therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}, \text{ 则 } \frac{a_8}{b_8} = \frac{S_{15}}{T_{15}} = \frac{3 \times 15 - 1}{2 \times 15 + 3} = \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

8. 2016~2017学年广东广州高一下学期期末铁一、广外等三校联考第3题 ★★

等差数列的前 4 项之和为 30，前 8 项之和为 100，则它的前 12 项之和为 () .

- A. 130 B. 170 C. 210 D. 260

【答案】C

【解析】∵ 等差数列中， S_4 ， $S_8 - S_4$ ， $S_{12} - S_8$ 成等差数列，

$$\text{又 } S_4 = 30, S_8 = 100,$$

$$\therefore 30, 70, S_{12} - 100 \text{ 成等差数列,}$$

$$\therefore 2 \times 70 = 30 + S_{12} - 100,$$

$$\text{计算得出 } S_{12} = 210.$$

所以 C 选项是正确的.

【标注】【知识点】等差数列前 n 项和的性质

9. 2014~2015学年江苏苏州高一下学期期中模拟第11题5分 ★★★

设 S_n ， T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{4n-2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则

$$\frac{a_{10}}{b_3 + b_{18}} + \frac{a_{11}}{b_6 + b_{15}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{41}{78}$

【解析】∵ S_n ， T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和，

$$\text{且知 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{4n-2} \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{b_3 + b_{18}} + \frac{a_{11}}{b_6 + b_{15}} = \frac{a_{10} + a_{11}}{b_{10} + b_{11}} = \frac{\frac{1}{2} \times 20(a_1 + a_{20})}{\frac{1}{2} \times 20(b_1 + b_{20})}$$

$$= \frac{S_{20}}{T_{20}}$$

$$= \frac{40+1}{80-2} = \frac{41}{78}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{41}{78}.$$

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

3. 等比数列的通项与求和

10. 2012~2013学年北京西城区北京市第三十九中学高三上学期期中理科第13题5分 ★★

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4a_1$, $2a_2$, a_3 成等差数列 , 若 $a_1 = 1$, 则 $S_4 =$ _____ .

【答案】 15

【解析】 $\because 2a_2 - 4a_1 = a_3 - 2a_2$,
 $\therefore 2q - 4 = q^2 - 2q$,
 即 $q^2 - 4q + 4 = 0 \Rightarrow q = 2$,
 $\therefore S_4 = \frac{1 \times (1 - 2^4)}{1 - 2} = 15$.

【标注】 【知识点】 等比数列求和问题

【知识点】 等差数列的性质及应用

【素养】 数学运算

11. 2019~2020学年4月天津北辰区天津市第四十七中学高三下学期月考第4题5分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 () .

- A. $S_n = 2a_n - 1$ B. $S_n = 1 - 2a_n$ C. $S_n = a_n - 2$ D. $S_n = 2 - a_n$

【答案】 D

【解析】 数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,
 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项 , 以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列 ,
 $\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,
 前 n 项和为 $S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - a_n$,
 故选 : D .

【标注】 【知识点】 等比数列求和问题

12. 2014年北京丰台区高三一模理科第10题 ★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_3 + a_5 = 8$, $a_1 a_5 = 4$, 则 $\frac{a_{13}}{a_9} =$ _____ .

【答案】 9

【解析】 因为 $\{a_n\}$ 为等比数列 , 所以 $a_1 a_5 = a_3^2 = 4$, 又 $a_3 + a_5 = 8$
 所以 $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_5 = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_3 = -2 \\ a_5 = 10 \end{cases}$ (舍) ,
 所以 $q^2 = \frac{a_5}{a_3} = 3$,

所以 $\frac{a_{13}}{a_9} = q^4 = 9$.

故答案为 9 .

【标注】【知识点】利用方程组求等比数列

13. 2018~2019学年9月北京朝阳区对外经济贸易大学附属中学高二上学期月考第7题5分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$, 则 a_{10} 等于 () .

A. -4×3^{-9}

B. 4×3^{-9}

C. -4×3^7

D. 4×3^7

【答案】 A

【解析】 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$,

所以等比数列的公比为 : $-\frac{1}{3}$,

所以 $a_{10} = a_2 q^8 = (-\frac{4}{3})(-\frac{1}{3})^8 = -4 \times 3^{-9}$.

故选 A .

【标注】【知识点】等比数列求通项问题

14. 2016~2017学年陕西西安雁塔区西安高新第一中学高一下学期期中第3题4分 ★

在等比数列 $\{a_n\}$ 中 , 已知 $a_7 \cdot a_{12} = 5$, 则 $a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} = ()$.

A. 10

B. 50

C. 25

D. 75

【答案】 C

【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等比数列 ,

$\therefore a_7 \cdot a_{12} = a_9 \cdot a_{10} = a_8 \cdot a_{11} = 5$,

$\therefore a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} = 25$.

【标注】【知识点】等比数列角标和性质的应用

4. 等比数列的性质

15. 2016~2017学年广东深圳福田区深圳市高级中学高中部高一下学期期末文科第6题5分 ★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_2 = ()$.

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{8}$

【答案】 C

【解析】 $a_3 \cdot a_5 = a_4^2 = 4(a_4 - 1)$,
 $a_4^2 - 4a_4 + 4 = 0$, $(a_4 - 2)^2 = 0$,
 $a_4 = 2$, $a_4 = a_1 q^3 = 2$,
 $q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$,
 $\therefore a_2 = a_1 q = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.
 故选 C .

【标注】【知识点】等比数列的概念与通项公式

16. 2017~2018学年浙江绍兴诸暨市高一下学期期末第8题3分 ★★★

已知数列 $\{a_n\}$ 不是常数列，前 n 项和为 S_n ，下列描述中，错误的是（ ）.

- A. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_n > 0$ 恒成立，则 $\{a_n\}$ 单调递增
- B. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\frac{S_n}{n}$ 也成等差数列
- C. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $S_{2019} \cdot a_{2019} > 0$ 恒成立
- D. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\{2^{a_n}\}$ 也为等比数列

【答案】 D

【解析】 在 A 中，若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_n > 0$ 恒成立，则公差 $d > 0$ ，故 $\{a_n\}$ 单调递增，故 A 正确；

在 B 中，若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$$\text{则 } \frac{S_n}{n} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d, \text{ 也成等差数列，故 B 正确；}$$

在 C 中，若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

$$\text{则 } S_{2019} \cdot a_{2019} = \frac{a_1(1-q^{2019})}{1-q} \times a_1 q^{2018} = a_1^2 q^{2018} \times \frac{1-q^{2019}}{1-q} > 0 \text{ 恒成立，故 C 正确；}$$

在 D 中，若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，

$$\text{则 } 2^{a_n} = 2^{a_1 q^{n-1}}, \quad \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_1(q^n - q^{n-1})} \text{ 不是常数，}$$

故 $\{2^{a_n}\}$ 不是等比数列，故 D 错误 .

故选 D .

【标注】【知识点】等比数列的判定与证明