

01等差数列与等比数列

1. 等差数列的通项与求和



【备注】带学生推导各公式：

【等差数列通项-累加法】

一般地，如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1 ，公差是 d ，我们根据等差数列的定义，可以得到

$$a_2 - a_1 = d,$$

$$a_3 - a_2 = d,$$

$$a_4 - a_3 = d,$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

将上面 $n-1$ 个等式累加，得到：

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = (n-1)d$$

整理得到：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

上式就成为等差数列的通项公式。

【等差数列求和-倒序相加法】

由高斯算法的启示，对于公差为 d 的等差数列，我们用两种方式表示 S_n ：

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \text{①}$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \text{②}$$

①+②得：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

由此可得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

如果带入等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， S_n 也可以用首项 a_1 与公差 d 表示，即：

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

 直接利用公式

1. ★

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1 = 2, a_2 + a_3 = 13$ ，那么则 $a_4 + a_5 + a_6$ 等于 ()

- A. 40 B. 42 C. 43 D. 45

【答案】 B

【标注】 【知识点】 等差数列的概念与通项公式

2. 2013年北京海淀区高三一模文科第2题 ★

等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 3, a_3 + a_4 = 9$ ，则 $a_1 \cdot a_6$ 的值为 () .

- A. 14 B. 18 C. 21 D. 27

【答案】 A

【解析】 $\begin{cases} a_2 = 3 \\ a_3 + a_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 2d + a_1 + 3d = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a_6 = 7$ 所以 $a_1 \cdot a_6 = 14$
故答案为A .

【标注】 【知识点】 利用方程组求等差数列

【素养】 数学运算

3. 2017~2018学年辽宁大连高二上学期期末理科第4题5分 ★

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_7 + a_8 = 28$ ，则该数列的前 10 项和 $S_{10} = ()$.

- A. 64 B. 100 C. 110 D. 120

【答案】 B

【解析】 $(a_7 + a_8) - (a_1 + a_2) = 12d = 24$ ，则 $d = 2$.

又 $\because a_1 + a_2 = 2a_1 + d = 4$ ，则 $a_1 = 1$.

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ ， $a_{10} = 19$.

$\therefore S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 100$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 等差数列的性质及应用

4. 2019~2020学年5月北京丰台区北京市第十二中学高二下学期月考第4题4分 ★

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和 . 若 $a_1 + a_9 = 18$ ， $a_4 = 7$ ，则 $S_{10} = ()$.

- A. 55 B. 81 C. 90 D. 100

【答案】 D

【解析】 $\begin{cases} a_1 + a_9 = 18 \\ a_4 = a_1 + 3d = 7 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$, $S_{10} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 100$,
故选 D.

【标注】【知识点】等差数列求和问题；利用方程组求等差数列

5. 2013年上海高考上海卷 ★

若等差数列的前 6 项和为 23，前 9 项和为 57，则数列的前 n 项和 $S_n =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{6}n^2 - \frac{7}{6}n$

【解析】 设等差数列的前 n 项和 $S_n = an^2 + bn$ ，则由题意可得 $\begin{cases} 36a + 6b = 23 \\ 81a + 9b = 57 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = -\frac{7}{6} \end{cases}$ ，

故数列的前 n 项和 $S_n = \frac{5}{6}n^2 - \frac{7}{6}n$.

故答案为： $\frac{5}{6}n^2 - \frac{7}{6}n$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】利用方程组求等差数列；等差数列求和问题

2. 等差数列的性质

🔗 等差数列通项的性质

若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 d 的等差数列，则 $\{a_n\}$ 具有如下性质：

1. $d > 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是递增数列； $d < 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是递减数列； $d = 0$ ，数列 $\{a_n\}$ 是常数列；
 2. $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_m - a_k}{m - k} (m, n, k \in \mathbf{N}^*)$ ，变形为 $a_n = a_m + (n - m)d (m, n \in \mathbf{N}^*)$ ；
 3. 若 $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q (m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$ ；更特殊的情况，若 k 是 m, n 的等差中项，则 a_k 是 a_m 和 a_n 的等差中项；
 4. 数列 $\{\lambda a_n + b\}$ 是公差为 λd 的等差数列，以此推广，若 $\{b_n\}$ 是公差为 d_0 等差数列，则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ 是公差为 $\lambda_1 d + \lambda_2 d_0$ 的等差数列；
 5. 下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbf{N}^*)$ 组成公差为 md 的等差数列.
- 请读者自行由等差数列的定义和通项公式推导.

【备注】对于性质3，可以拓展成等号两边数列项数相同角标和相同等号成立.

6. ★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_7 + a_9 = 16$ ， $a_4 = 1$ ，则 a_{12} 的值是 () .

A. 15

B. 30

C. 31

D. 64

【答案】 A

【标注】 【知识点】 等差数列的概念与通项公式

7. 2018~2019学年10月山西太原迎泽区太原市第五中学校高三上学期月考文科第13题5分 ★

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_8 = 10$, 则 $3a_5 + a_7 =$ _____ .

【答案】 20

【解析】 方法一: 依题意 $2a_1 + 9d = 10$,

$$\text{所以 } 3a_5 + a_7 = 3(a_1 + 4d) + a_1 + 6d = 4a_1 + 18d = 20 .$$

$$\text{或: } 3a_5 + a_7 = 2(a_3 + a_8) = 20$$

方法二: 在等差数列中, $a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = 10$, 所以

$$\begin{aligned} 3a_5 + a_7 &= 2a_5 + a_5 + a_7 = a_1 + a_9 + a_5 + a_7 \\ &= (a_1 + a_7) + (a_5 + a_9) = 2a_4 + 2a_7 = 2 \times 10 = 20 . \end{aligned}$$

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 等差数列求通项问题

8. ★★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 + a_9 - a_7 = 10$, 则 S_{13} 的值为 ()

A. 130

B. 260

C. 156

D. 168

【答案】 A

【解析】 由 $a_5 + a_9 - a_7 = 10$ 可得 $2a_7 - a_7 = a_7 = 10$,

$$\text{由等差数列前 } n \text{ 项和公式可得 } S_{13} = \frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 13a_7 = 130 .$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 等差数列前n项和的性质



等差数列前n项和的性质

下面的一系列结论都可以利用等差数列的通项公式和前 n 项和公式推导出来, 可以简化运算, 作为二级结论使用:

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和公式为 S_n , 则有

(1) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 也成等差数列, 公差为 n^2d .

(2) 若 $S_p = S_q$ ($p \neq q$), 则 $S_{p+q} = 0$.

(3) 若 $S_p = q, S_q = p$ ($p \neq q$), 则 $S_{p+q} = -(p+q)$.

(4) 若项数为奇数, 则有 $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$.

(5) 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 仍为等差数列, 且公差为 $\{a_n\}$ 公差的一半 .

9. ★★

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_4 = 7$, 则 $S_7 =$ _____ .

【答案】 49

【解析】 由等差数列性质可知 $S_7 = a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 7a_4 = 7 \cdot 7 = 49$.

【标注】 【知识点】 等差数列前n项和的性质

10. ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $S_5 = 28$, $S_{10} = 36$, 则 S_{15} 等于 () .

A. 80

B. 40

C. 24

D. -48

【答案】 C

【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $S_5 = 28$, $S_{10} = 36$,

又 $\because S_5, S_{10} - S_5, S_{15} - S_{10}$ 成等差数列,

$\therefore 2 \times 8 = 28 + S_{15} - 36$,

$\therefore S_{15} = 24$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 等差数列前n项和的性质; 等差数列的性质及应用

11. 2020~2021学年4月陕西西安高新区高新第三中学高三下学期月考理科 (十一模) 第14题5分 ★★

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_6}{S_{12}} =$ _____ .

【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】 法一:

由等差数列的求和公式可得 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{3a_1 + 3d}{6a_1 + 15d} = \frac{1}{3}$, 可得 $a_1 = 2d$ 且 $d \neq 0$,

$\therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{6a_1 + 15d}{12a_1 + 66d} = \frac{27d}{90d} = \frac{3}{10}$;

法二:

$\because S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 仍然是等差数列, $\therefore 2(S_6 - S_3) = S_3 + (S_9 - S_6)$,

又 $\because S_6 = 3S_3$, 解得: $S_9 = 6S_3$.

$\therefore 2(S_9 - S_6) = (S_{12} - S_9) + (S_6 - S_3)$, 且 $S_9 = 6S_3$, $S_6 = 3S_3$,

$$\text{解得：} S_{12} = 10S_3 \therefore \frac{S_6}{S_{12}} = \frac{3S_3}{10S_3} = \frac{3}{10} .$$

【标注】【知识点】等差数列前n项和的性质；等差数列的性质及应用

12. 2017~2018学年9月四川绵阳涪城区南山中学实验学校高二上学期月考理科第3题4分 ★

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$ ，则 $\frac{S_9}{S_5} = ()$.

- A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，由等差数列的性质可得：

$$\begin{aligned} a_1 + a_9 &= 2a_5, \quad a_1 + a_5 = 2a_3, \\ \therefore \frac{S_9}{S_5} &= \frac{\frac{a_1 + a_9}{2} \times 9}{\frac{a_1 + a_5}{2} \times 5} = \frac{9a_5}{5a_3} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{9} = 1. \end{aligned}$$

故选 A .

【标注】【知识点】等差数列的概念与通项公式

13. 2018~2019学年北京东城区北京市第一六六中学高二上学期期中第2题5分 ★

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{S_3}{3} - S_1 = 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公差是 () .

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

【答案】B

【解析】 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 S_n ，又 $\frac{S_3}{3} - S_1 = 1$ ，则 $\frac{(a_1 + a_3) \times 3}{2 \times 3} - a_1 = 1$ ，即

$$a_2 - a_1 = 1,$$

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $d = a_2 - a_1 = 1$.

故选 B .

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用；等差数列前n项和的性质

14. 2020~2021学年10月河南郑州金水区郑州市第七中学高二上学期月考第8题5分 ★★

在等差数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 是其前 n 项和， $a_1 = -11$ ， $\frac{S_{10}}{10} - \frac{S_8}{8} = 2$ ，则 $S_{11} = ()$.

- A. -11 B. 11 C. 10 D. -10

【答案】A

【解析】由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，

$$\begin{aligned} \text{得 } \frac{S_n}{n} &= a_1 + \frac{n-1}{2}d, \\ \text{由 } \frac{S_{10}}{10} - \frac{S_8}{8} &= 2, \\ \text{得 } a_1 + \frac{10-1}{2}d - \left(a_1 + \frac{8-1}{2}d\right) &= 2, \text{ 解得 } d = 2, \\ \therefore \frac{S_{11}}{11} &= a_1 + \frac{(11-1)}{2}d = -11 + 5 \times 2 = -1, \\ \therefore S_{11} &= -11, \\ \text{故选 A.} \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等差数列前n项和的性质；等差数列的性质及应用

15. 2013年北京石景山区高三一模理科第11题 ★★

在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -2013$ ，其前 n 项和为 S_n ，若 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$ ，则 S_{2013} 的值等于 _____。

【答案】 -2013

【解析】 设等差数列前 n 项和为 $S_n = An^2 + Bn$ ，则 $\frac{S_n}{n} = An + B$ ，
 $\therefore \{\frac{S_n}{n}\}$ 成等差数列。
 若 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$ ，则 $\frac{S_1}{1} = a_1 = -2013$ ，
 $\therefore \{\frac{S_n}{n}\}$ 是以 1 为公差的等差数列。
 $\therefore \frac{S_{2013}}{2013} = -2013 + 2012 \times 1 = -1$ ，
 $\therefore S_{2013}$ 的值等于 -2013

【标注】【知识点】等差数列前n项和的性质

16. 2019~2020学年3月重庆沙坪坝区重庆市第八中学高三下学期周测D卷理科第14题5分 ★★

等差数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n ， T_n ，若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+1}{2n}$ ，则 $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{32}{21}$

【解析】 由 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ ，
 又 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+1}{2n}$ ，
 得 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{3(2n-1)+1}{2(2n-1)} = \frac{6n-2}{4n-2} = \frac{3n-1}{2n-1}$ ，
 $\therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{3n-1}{2n-1}$ ，
 $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{3 \times 11 - 1}{2 \times 11 - 1} = \frac{32}{21}$ ，填 $\frac{32}{21}$ 。

【标注】【知识点】等差数列的前n项和

17. 2014年高考真题浙江卷理科第15题 ★★★

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，

(1) 已知 $a_6 + a_{14} = 20$ ，则 $S_{19} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 T_n 是等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且对所有的正整数 n 有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{2n+3}$ 成立，则 $\frac{a_5}{b_5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 190； $\frac{65}{21}$

【解析】 (1) 法一： $S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = \frac{a_6 + a_{14}}{2} \times 19 = 190$ ；

法二：因为 $a_6 + a_{14} = 20$ ，所以 $a_{10} = 10$ ， $S_{19} = 19a_{10} = 190$.

(2) 错解： $\because \frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{2n+3}$ ，可设 $S_n = (7n+2)k$ ， $T_n = (2n+3)k$ ，

$$\frac{a_5}{b_5} = \frac{S_5 - S_4}{T_5 - T_4} = \frac{7k}{2k} = \frac{7}{2} .$$

错误分析：等差数列的前 n 项和 S_n 是关于 n 的常数项为 0 的二次函数，所以本题中设

$S_n = (7n+2)k$ ，此处的 k 不是一个常数，而是一个关于 n 的一次函数，且恰为 n 的某个倍数，此方法因为忽视了 S_n 与 n 的关系，故错误 .

正确解法：法一： $\because$ 等差数列的前 n 项和 S_n 是关于 n 的常数项为 0 的二次函数，

$\therefore$ 可设 $S_n = k(7n+2)n$ ， $T_n = k(2n+3)n$ ，于是 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{S_5 - S_4}{T_5 - T_4} = \frac{65k}{21k} = \frac{65}{21}$.

法二： $\because S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ ， $a_5 = \frac{a_1 + a_9}{2}$ ， $\therefore S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5$ ，同理 $T_9 = 9b_5$ ，

$$\therefore \frac{a_5}{b_5} = \frac{S_9}{T_9} = \frac{7 \times 9 + 2}{2 \times 9 + 3} = \frac{65}{21} .$$

【标注】 【知识点】 等差数列前 n 项和的性质

18. 2017~2018学年天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第11周第10题5分 ★★

已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n ，且 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+45}{n+3}$ ，则使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}} = \frac{14n+38}{2n+2} = 7 + \frac{12}{n+1}$ ，

则 $n+1 = 2, 3, 4, 6, 12$ ，

共 5 个 .

【标注】 【知识点】 等差数列前 n 项和的性质

3. 等比数列的通项与求和



【备注】【等比通项-累乘法】

由等比数列的定义可知：

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q, \frac{a_n}{a_{n-1}} = q,$$

将这 $n-1$ 个式子的等号两边分别相乘，可以得到 $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$ ，即

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

【等比求和-错位相减法】

对于首项为 a_1 ，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ ，当 $q = 1$ 时， $\{a_n\}$ 为常数列，此时有 $S_n = na_1$ 。

当 $q \neq 1$ 时，我们采用错位相减法推导它的前 n 项和公式：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1},$$

两边同乘 q ，得：

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n,$$

两式相减，得

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1 q^n.$$

从而得出

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} (q \neq 1).$$

19. 2017~2018学年北京西城区北京市第一五六中学高三上学期中理科第2题5分 ★

若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_3 = 5$ ，且公比 $q = 2$ ，则 $a_3 + a_5 = ()$

A. 10

B. 13

C. 20

D. 25

【答案】C

【解析】方法一：根据观察，数列可以为 $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ，即 $a_n = 2^{n-1}$ ，那么

$$a_3 + a_5 = 4 + 16 = 20, \text{ 故选C.}$$

方法二：对于 $a_3 + a_5 = a_1 q^2 + a_3 q^2 = 4(a_1 + a_3)$ ，又 $a_1 + a_3 = 5$ ，则

$$a_3 + a_5 = 4 \times 5 = 20, \text{ 故选C.}$$

方法三：对于 $a_1 + a_3 = a_1 + a_1 q^2 = a_1 + 4a_1 = 5$ ，解方程可得， $a_1 = 1$ ，那么通项

$$a_n = 2^{n-1}, \text{ 可知 } a_3 = 4, a_5 = 16, \text{ 则 } a_3 + a_5 = 20, \text{ 故选C.}$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题

【素养】数学运算

20. 2016~2017学年广东深圳宝安区深圳市宝安区中学高二上学期期中理科第7题5分 ★★

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 是它的前 n 项和，若 $a_2 \cdot a_3 = 2a_1$ ，且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$ ，则 $S_5 = ()$.

A. 35

B. 33

C. 31

D. 29

【答案】 C

【解析】 $\because a_4$ 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$ ，
 $\therefore a_4 + 2a_7 = \frac{5}{2}$ ，
 又 $\because \{a_n\}$ 是等比数列， $a_2 a_3 = 2a_1$ ，
 $\therefore \begin{cases} a_1 q^3 + 2a_1 q^6 = \frac{5}{2} \\ a_1^2 q^3 = 2a_1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ a_1 = 16 \end{cases}$ ，
 $\therefore S_5 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$.

【标注】 【知识点】 等差数列的性质及应用

21. 2019年高考真题全国卷III理科第5题5分 ★★

已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15，且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$ ，则 $a_3 = ()$.

A. 16

B. 8

C. 4

D. 2

【答案】 C

【解析】 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15 .

设公比为 $q (q > 0)$ ，即 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15$ ①，

且 $a_5 = 3a_3 + 4a_1$ ，

即 $a_1 q^4 = 3a_1 q^2 + 4a_1$ ，

$\therefore q^4 - 3q^2 - 4 = 0$ ，

$q^2 = -1$ (舍) 或 $q^2 = 4$ ，

$\because q > 0$ ， $\therefore q = 2$ ，

将 $q = 2$ 代入①得 $a_1 = 1$ ，

$\therefore a_3 = a_1 q^2 = 4$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 等比数列求通项问题

22. 高考真题 ★★

在公比为整数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 如果 $a_1 + a_4 = 18$, $a_2 + a_3 = 12$, 那么该数列的前 8 项之和为 () .

A. 513

B. 512

C. 510

D. $\frac{225}{8}$

【答案】 C

【解析】 $a_1(1+q^3) = 18, a_1(q+q^2) = 12, \frac{1+q^3}{q+q^2} = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}$ 或 $q = 2$,
而 $q \in \mathbb{Z}, q = 2, a_1 = 2, S_8 = \frac{2(1-2^8)}{1-2} = 2^9 - 2 = 510$

【标注】 【知识点】 等比数列的概念与通项公式

23. 2013年高考真题四川卷文科第16题 ★★★

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 - a_1 = 2$, 且 $2a_2$ 为 $3a_1$ 和 a_3 的等差中项, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公比及前 n 项和.

【答案】 公比 $q = 3$, 首项 $a_1 = 1$, 数列的前 n 项 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【解析】 本小题考查等比数列、等差中项等基础知识, 考查运算求解能力

设该数列的公比为 q , 由已知, 可得 $a_1q - a_1 = 2$, $4a_2q = 3a_2 + a_1q^2$, 所以

$a_2(q-1) = 2, q^2 - 4q + 3 = 0$, 解得 $q = 3$ 或 $q = 1$, 由于 $a_2(q-1) = 2$, 因此 $q = 1$ 不符合题意, 应舍去, 故公比 $q = 3$, 首项 $a_1 = 1$,

所以, 数列的前 n 项 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

【标注】 【知识点】 等比数列的概念与通项公式

4. 等比数列的性质

等比数列通项的性质

设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列, 则有:

1. $a_n = a_m q^{n-m}$.

2. 当 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$) 时, 有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$; 特别地, 若 n 是 m 和 p 的等差中项时, a_n 是 a_m 和 a_p 的等比中项.

3. 对于非零常数 λ 和公比为 q' 的等比数列 $\{b_n\}$, 有如下结论:

(1) $\{\lambda a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $\{\lambda b_n\}$ 是公比为 q' 的等比数列;

(2) $\{a_n b_n\}$ 是公比为 qq' 的等比数列, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是公比为 $\frac{q}{q'}$ 的等比数列.

(3) $\{|a_n|\}$ 是公比为 $|q|$ 的等比数列.

4. 每隔 $k (k \in \mathbf{N}^*)$ 项取出一项, 按照原来顺序排列所得的数列仍然是等比数列, 且公比为 q^{k+1} .
5. 连续 k 项的和仍然构成等比数列, 且公比为 q^k .
6. 若 $a_n > 0$, 则 $\{\log_a a_n\} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 是等差数列, 且公差为 $\log_a q$.

等比数列前 n 项和的性质

【“片段和”的性质】

对于公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列, 记 S_n 为其前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍是等比数列, 且公比为 q^n .

更一般的情况, 连续 n 项的和组成新数列, 则该数列是公比为 q^n 的等比数列.

【拓展】此性质可以拓展为“片段积”, 即对于公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$, 其连续 n 项的积组成的数列也是等比数列, 其公比为 q^{n^2} .

【“跳跃和”的性质】

若等比数列 $\{a_n\}$ 共有偶数项, 则偶数项之和与奇数项之和的比值为公比 q .

例如: $\frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7} = q$.

24. 2017~2018学年10月福建泉州惠安县惠安县惠南中学高二上学期月考第11题5分 ★★

等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 = ()$.

- A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

【答案】B

【解析】 $a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 = 21$,

$$1 + q^2 + q^4 = 7,$$

$$\therefore q^2 = 2,$$

$$a_3 + a_5 + a_7 = a_1 q^2 + a_1 q^4 + a_1 q^6 = a_1 q^2 (1 + q^2 + q^4) = 3 \times 2 \times 7 = 42.$$

故选 B.

【标注】【知识点】等比数列的性质及应用

【知识点】等比数列的概念与通项公式

【素养】数学运算

25. 2019年广东揭阳高三二模理科第3题5分 ★

在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 3$, 前三项和为 21, 则 $a_3 + a_4 + a_5 = ()$.

- A. 33 B. 72 C. 84 D. 189

【答案】C

【解析】在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1 = 3$ ，前三项和为 21，

$$\text{故 } 3 + 3q + 3q^2 = 21,$$

$$\therefore q = 2,$$

$$\therefore a_3 + a_4 + a_5 = (a_1 + a_2 + a_3)q^2 = 21 \times 2^2 = 84.$$

故选 C.

【标注】【知识点】求等比数列的基本量

26. 2019~2020学年天津滨海新区天津开发区第一中学高二上学期期中第6题3分 ★★

已知在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 a_2 a_3 = 5$ ， $a_7 a_8 a_9 = 10$ ，则 $a_4 a_5 a_6 = ()$.

A. $5\sqrt{2}$

B. 7

C. 6

D. $4\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】方法一： $a_1 a_2 a_3 = 5 \Rightarrow a_2^3 = 5$ ；

$$a_7 a_8 a_9 = 10 \Rightarrow a_8^3 = 10,$$

$$a_5^2 = a_2 a_8,$$

$$\therefore a_5^6 = a_2^3 a_8^3 = 50,$$

$$\therefore a_4 a_5 a_6 = a_5^3 = 5\sqrt{2}.$$

方法二：因为 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的等比数列，

$$\text{所以 } a_7 a_8 a_9 = (a_1 a_2 a_3) q^{18},$$

$$\text{即 } 10 = 5 \cdot q^{18}, \quad q^{18} = 2, \quad q^9 = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } a_4 a_5 a_6 = (a_1 a_2 a_3) q^9 = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

方法三：由等比数列的性质知： $a_4^2 = a_1 a_7$ ， $a_5^2 = a_2 a_8$ ，

$$a_6^2 = a_3 a_9;$$

$$\text{三式相乘得：} (a_4 a_5 a_6)^2 = (a_1 a_2 a_3)(a_7 a_8 a_9) = 50,$$

$$\therefore a_4 a_5 a_6 = 5\sqrt{2}.$$

故选 A.

【标注】【知识点】等比数列的概念与通项公式

27. 2019~2020学年天津武清区武清区杨村第四中学高三上学期期中第6题5分 ★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，各项都是整数，且 a_1 ， $\frac{1}{2}a_3$ ， $2a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_9 + a_{10}}{a_7 + a_8}$ 的值为 () .

A. $1 + \sqrt{2}$

B. $3 + 2\sqrt{2}$

C. $1 - \sqrt{2}$

D. $3 - 2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公共比为 q ，则由 $a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列可得， $a_3 = a_1 + a_2$ ，
 即 $a_1q^2 = a_1 + 2a_1q$ ，
 所以 $q^2 = 1 + 2q$ ，
 所以 $q = 1 \pm \sqrt{2}$ ，
 又因为等比数列 $\{a_n\}$ 中，各项都是正数，
 所以 $q > 0$ ，所以 $q = 1 + \sqrt{2}$ ，
 所以 $\frac{a_9 + a_{10}}{a_7 + a_8} = \frac{(a_7 + a_8)q^2}{a_7 + a_8} = q^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ 。
 故选 B。

【标注】【知识点】等比数列求通项问题

28. 2019~2020学年浙江杭州滨江区浙江省杭州第二中学高三上学期开学考试第5题4分 ★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $\frac{3a_1}{2}, \frac{a_3}{4}, a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_{20} + a_{19}}{a_{18} + a_{17}} = ()$ 。
 A. 9 B. 6 C. 3 D. 1

【答案】 A

【解析】 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $\frac{3a_1}{2}, \frac{a_3}{4}, a_2$ 成等差数列，
 $\therefore 2 \times \frac{a_3}{4} = \frac{3a_1}{2} + a_2$ ，
 $\therefore \frac{a_1q}{2} = \frac{3a_1}{2} + a_1q$ ，
 $\therefore a_1 > 0$ ，
 $\therefore q^2 - 2q - 3 = 0$ ，解得 $q = -1$ (舍) 或 $q = 3$ ，
 $\frac{a_{20} + a_{19}}{a_{18} + a_{17}} = \frac{a_{18} \cdot q^2 + a_{17} \cdot q^2}{a_{18} + a_{17}} = q^2 = 9$ 。
 故选 A。

【标注】【知识点】求等比数列的基本量

29. 2017~2018学年9月湖南岳阳岳阳楼区湖南岳阳市第一中学高三上学期月考理科第3题5分 ★★

记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 2$ ， $S_6 = 18$ ，则 $\frac{S_{10}}{S_5}$ 等于 ()。
 A. -3 B. 5 C. -31 D. 33

【答案】 D

【解析】 $\because S_3 = 2$ 且 $S_6 = 18$ 。
 $\therefore q \neq 1$ ，且 $\frac{S_6}{S_3} = \frac{1 - q^6}{1 - q^3} = 1 + q^3 = 9$ 。
 $\therefore q = 2$ ，

$$\therefore \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{1-q^{10}}{1-q^5} = 1+q^5 = 33.$$

故选 D .

【标注】【素养】数学运算

【知识点】等比数列求和问题

30. 2018年高考真题华侨港澳台卷第12题5分 ★★

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_4 = 1$, $S_8 = 3$, 则 $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = (\quad)$.

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】 C

【解析】 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_4 = 1$, $S_8 = 3$,

由等比数列的性质得 S_4 , $S_8 - S_4$, $S_{12} - S_8$ 成等比数列 ,

$\therefore 1$, $3 - 1 = 2$, $S_{12} - S_8 = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ 成等比数列 ,

$\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 4$.

故选 C .

【标注】【知识点】等比数列求和问题 ; 等比数列求通项问题