

# 01等差数列与等比数列

## 1. 等差数列的通项与求和



### 直接利用公式

1. 已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 且  $a_1 = 2, a_2 + a_3 = 13$ , 那么则  $a_4 + a_5 + a_6$  等于 ( ).  
A. 40                      B. 42                      C. 43                      D. 45
2. 等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 3, a_3 + a_4 = 9$ , 则  $a_1 \cdot a_6$  的值为 ( ).  
A. 14                      B. 18                      C. 21                      D. 27
3. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_1 + a_2 = 4, a_7 + a_8 = 28$ , 则该数列的前 10 项和  $S_{10} = ( )$ .  
A. 64                      B. 100                      C. 110                      D. 120
4. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $a_1 + a_9 = 18, a_4 = 7$ , 则  $S_{10} = ( )$ .  
A. 55                      B. 81                      C. 90                      D. 100
5. 若等差数列的前 6 项和为 23, 前 9 项和为 57, 则数列的前  $n$  项和  $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 2. 等差数列的性质

### 等差数列通项的性质

若数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $d$  的等差数列, 则  $\{a_n\}$  具有如下性质:

1.  $d > 0$ , 数列  $\{a_n\}$  是递增数列;  $d < 0$ , 数列  $\{a_n\}$  是递减数列;  $d = 0$ , 数列  $\{a_n\}$  是常数列;
2.  $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_m - a_k}{m - k} (m, n, k \in \mathbf{N}^*)$ , 变形为  $a_n = a_m + (n - m)d (m, n \in \mathbf{N}^*)$ ;
3. 若  $m + n = p + q$ , 则  $a_m + a_n = a_p + a_q (m, n, p, q \in \mathbf{N}^*)$ ; 更特殊的情况, 若  $k$  是  $m, n$  的等差中项, 则  $a_k$  是  $a_m$  和  $a_n$  的等差中项;
4. 数列  $\{\lambda a_n + b\}$  是公差为  $\lambda d$  的等差数列, 以此推广, 若  $\{b_n\}$  是公差为  $d_0$  等差数列, 则  $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$  是公差为  $\lambda_1 d + \lambda_2 d_0$  的等差数列;

5. 下标成等差数列且公差为  $m$  的项  $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbf{N}^*)$  组成公差为  $md$  的等差数列 .  
请读者自行由等差数列的定义和通项公式推导 .

6. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_7 + a_9 = 16, a_4 = 1$ , 则  $a_{12}$  的值是 ( ) .

- A. 15                      B. 30                      C. 31                      D. 64

7. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_3 + a_8 = 10$ , 则  $3a_5 + a_7 =$  \_\_\_\_\_ .

8. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_5 + a_9 - a_7 = 10$ , 则  $S_{13}$  的值为 ( )

- A. 130                      B. 260                      C. 156                      D. 168

### 等差数列前 $n$ 项和的性质

下面的一系列结论都可以利用等差数列的通项公式和前  $n$  项和公式推导出来, 可以简化运算, 作为二级结论使用:

已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 前  $n$  项和公式为  $S_n$ , 则有

(1)  $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$  也成等差数列, 公差为  $n^2 d$ .

(2) 若  $S_p = S_q (p \neq q)$ , 则  $S_{p+q} = 0$ .

(3) 若  $S_p = q, S_q = p (p \neq q)$ , 则  $S_{p+q} = -(p+q)$ .

(4) 若项数为奇数, 则有  $S_n = na_{\frac{n+1}{2}}$ .

(5) 数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  仍为等差数列, 且公差为  $\{a_n\}$  公差的一半.

9. 数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_4 = 7$ , 则  $S_7 =$  \_\_\_\_\_ .

10. 已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 且  $S_5 = 28, S_{10} = 36$ , 则  $S_{15}$  等于 ( ) .

- A. 80                      B. 40                      C. 24                      D. -48

11. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{S_6}{S_{12}} =$  \_\_\_\_\_ .

12. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$ , 则  $\frac{S_9}{S_5} =$  ( ) .

- A. 1                      B. -1                      C. 2                      D.  $\frac{1}{2}$

13. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{S_3}{3} - S_1 = 1$ , 则数列  $\{a_n\}$  的公差是 ( ) .

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C. 2                      D. 3

14. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  是其前  $n$  项和,  $a_1 = -11, \frac{S_{10}}{10} - \frac{S_8}{8} = 2$ , 则  $S_{11} =$  ( ) .

- A. -11                      B. 11                      C. 10                      D. -10

15. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = -2013$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$ , 则  $S_{2013}$  的值等于 \_\_\_\_\_ .

16. 等差数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别是  $S_n, T_n$ , 若  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+1}{2n}$ , 则  $\frac{a_{11}}{b_{11}} =$  \_\_\_\_\_ .

17. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,

(1) 已知  $a_6 + a_{14} = 20$ , 则  $S_{19} =$  \_\_\_\_\_.

(2) 若  $T_n$  是等差数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 且对所有的正整数  $n$  有  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{2n+3}$  成立, 则  $\frac{a_5}{b_5} =$  \_\_\_\_\_.

18. 已知两个等差数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $A_n$  和  $B_n$ , 且  $\frac{A_n}{B_n} = \frac{7n+45}{n+3}$ , 则使得  $\frac{a_n}{b_n}$  为整数的正整数  $n$  的个数是 \_\_\_\_\_.

### 3. 等比数列的通项与求和



19. 若等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_3 = 5$ , 且公比  $q = 2$ , 则  $a_3 + a_5 =$  ( )

- A. 10                      B. 13                      C. 20                      D. 25

20. 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  是它的前  $n$  项和, 若  $a_2 \cdot a_3 = 2a_1$ , 且  $a_4$  与  $2a_7$  的等差中项为  $\frac{5}{4}$ , 则  $S_5 =$  ( ) .

- A. 35                      B. 33                      C. 31                      D. 29

21. 已知各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  的前 4 项和为 15, 且  $a_5 = 3a_3 + 4a_1$ , 则  $a_3 =$  ( ) .

- A. 16                      B. 8                      C. 4                      D. 2

22. 在公比为整数的等比数列  $\{a_n\}$  中, 如果  $a_1 + a_4 = 18$ ,  $a_2 + a_3 = 12$ , 那么该数列的前 8 项之和为 ( ) .

- A. 513                      B. 512                      C. 510                      D.  $\frac{225}{8}$

23. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 - a_1 = 2$ , 且  $2a_2$  为  $3a_1$  和  $a_3$  的等差中项, 求数列  $\{a_n\}$  的首项、公比及前  $n$  项和.

### 4. 等比数列的性质

#### 等比数列通项的性质

设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公比为  $q$  的等比数列, 则有:

1.  $a_n = a_m q^{n-m}$ .

2. 当  $m+n=p+q$  ( $m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$ ) 时, 有  $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ ; 特别地, 若  $n$  是  $m$  和  $p$  的等差中项时,  $a_n$  是  $a_m$  和  $a_p$  的等比中项.
3. 对于非零常数  $\lambda$  和公比为  $q'$  的等比数列  $\{b_n\}$ , 有如下结论:
- (1)  $\{\lambda a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列,  $\{\lambda b_n\}$  是公比为  $q'$  的等比数列;
- (2)  $\{a_n b_n\}$  是公比为  $qq'$  的等比数列,  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  是公比为  $\frac{q}{q'}$  的等比数列.
- (3)  $\{|a_n|\}$  是公比为  $|q|$  的等比数列.
4. 每隔  $k$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 项取出一项, 按照原来顺序排列所得的数列仍然是等比数列, 且公比为  $q^{k+1}$ .
5. 连续  $k$  项的和仍然构成等比数列, 且公比为  $q^k$ .
6. 若  $a_n > 0$ , 则  $\{\log_a a_n\}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是等差数列, 且公差为  $\log_a q$ .

## 等比数列前 $n$ 项和的性质

### 【“片段和”的性质】

对于公比为  $q$  ( $q \neq 1$ ) 的等比数列, 记  $S_n$  为其前  $n$  项和, 则  $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$  仍是等比数列, 且公比为  $q^n$ .

更一般的情况, 连续  $n$  项的和组成新数列, 则该数列是公比为  $q^n$  的等比数列.

【拓展】此性质可以拓展为“片段积”, 即对于公比为  $q$  的等比数列  $\{a_n\}$ , 其连续  $n$  项的积组成的数列也是等比数列, 其公比为  $q^{n^2}$ .

### 【“跳跃和”的性质】

若等比数列  $\{a_n\}$  共有偶数项, 则偶数项之和与奇数项之和的比值为公比  $q$ .

例如:  $\frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7} = q$ .

24. 等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ , 则  $a_3 + a_5 + a_7 = ( )$ .
- A. 21                      B. 42                      C. 63                      D. 84
25. 在各项都为正数的等比数列  $\{a_n\}$  中, 首项  $a_1 = 3$ , 前三项和为 21, 则  $a_3 + a_4 + a_5 = ( )$ .
- A. 33                      B. 72                      C. 84                      D. 189
26. 已知在各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 a_2 a_3 = 5$ ,  $a_7 a_8 a_9 = 10$ , 则  $a_4 a_5 a_6 = ( )$ .
- A.  $5\sqrt{2}$                       B. 7                      C. 6                      D.  $4\sqrt{2}$
27. 已知等比数列  $\{a_n\}$  中, 各项都是整数, 且  $a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$  成等差数列, 则  $\frac{a_9 + a_{10}}{a_7 + a_8}$  的值为  $( )$ .
- A.  $1 + \sqrt{2}$                       B.  $3 + 2\sqrt{2}$                       C.  $1 - \sqrt{2}$                       D.  $3 - 2\sqrt{2}$
28. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 且  $\frac{3a_1}{2}, \frac{a_3}{4}, a_2$  成等差数列, 则  $\frac{a_{20} + a_{19}}{a_{18} + a_{17}} = ( )$ .
- A. 9                      B. 6                      C. 3                      D. 1
29. 记等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3 = 2$ ,  $S_6 = 18$ , 则  $\frac{S_{10}}{S_5}$  等于  $( )$ .
- A. -3                      B. 5                      C. -31                      D. 33

30. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$  ,  $S_4 = 1$  ,  $S_8 = 3$  , 则  $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = ( \quad )$  .

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2