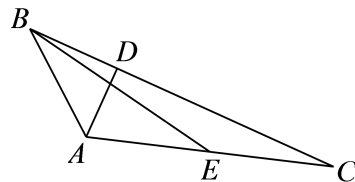


平面向量数量积运算

一、 选择题

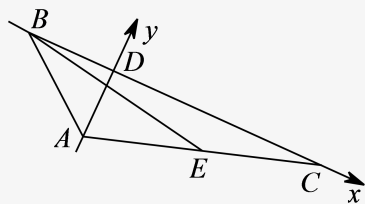
1. 如图所示，在三角形 ABC 中， $AD \perp BC$ ， $AD = 1$ ， $BC = 4$ ，点 E 为 AC 的中点， $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{15}{2}$ ，则 AB 的长度为（ ）。



- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 以 D 为原点，分别以 BC ， AD 所在直线为 x ， y 轴，建立如图所示平面直角坐标系，设 $BD = x$ ， $CD = 4 - x$ ，



则： $D(0,0)$ ， $A(0,-1)$ ， $B(-x,0)$ ， $C(4-x,0)$ ， $E\left(\frac{4-x}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，

$\therefore \overrightarrow{DC} = (4-x, 0)$ ， $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{4+x}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，

$\therefore \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{16-x^2}{2} + 0 = \frac{15}{2}$ ，

$\therefore x > 0$ ，

$\therefore$ 解得 $x = 1$ ，

$\therefore B(-1, 0)$ ，又 $A(0, -1)$ ，

$\therefore |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 。

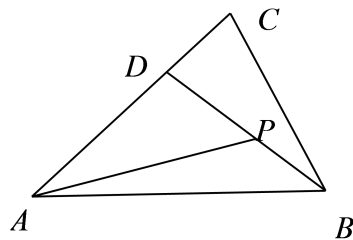
故选C。

【标注】 【知识点】 数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）

又 $4|\vec{m}| = 3|\vec{n}|$,
 $\therefore t \times \frac{3}{4}|\vec{n}|^2 \times \frac{1}{3} + |\vec{n}|^2 = 0$, 解得 $t = -4$.
 故选 B.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BD}$, 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().



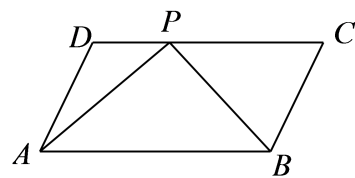
- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】 $\because \vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}, \vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BD}$,
 $\therefore \vec{AP} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD}$,
 $\because \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}, \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC}$,
 $\therefore \vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \vec{AB}$,
 $\therefore \vec{AP} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BD} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{AC} - \vec{AB}\right) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$,
 $\because \vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$,
 $\therefore \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{9}$,
 则 $\lambda + \mu = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$,
 故选: A.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义; 平面向量线性运算综合 (非坐标)

5. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 8$, $AD = 5$, $\vec{CP} = 3\vec{PD}$, $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 2$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ 的值是 ().



A. 8

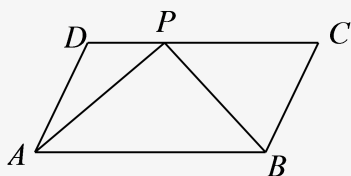
B. 12

C. 22

D. 24

【答案】 C

【解析】 如图所示，



平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 5$ ， $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= 5^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{16} \times 8^2 = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 22.$$

故选C.

【标注】【知识点】用基底法求向量的数量积

6. 若两个非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角是 () .

A. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{3}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】 C

【解析】 方法一：由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 两边平方得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ ，

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

由 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，两边平方得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2$ ，

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4|\vec{a}|^2$ ，将 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 代入 $|\vec{b}|^2 = 3|\vec{a}|^2$ ，

$$\cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot 2|\vec{a}|} = \frac{-2|\vec{a}|^2}{4|\vec{a}|^2} = -\frac{1}{2},$$

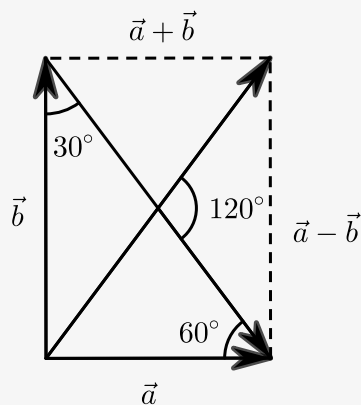
故 $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{2}{3}\pi$ 。

故选C。

方法二： $\because |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$

$\therefore$ 由向量运算的平行四边形法则和减法运算法则有

$\vec{a} \perp \vec{b}$



又： $|\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}|$

$\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 所成角为 120° 。

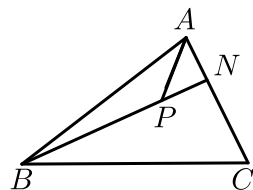
【标注】【知识点】向量的夹角的判断

7. 若 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 均为单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ， $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \leq 0$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$ 的最大值为 ()
- A. $\sqrt{2} - 1$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

【答案】 B

【标注】【知识点】单位向量；向量的模；向量的数量积的定义

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{NC}$ ，P 是 BN 上的一点，若 $\vec{AP} = m\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC}$ ，则实数 m 的值为 ()。



A. 1

B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{3}$

D. 3

【答案】 B**【解析】** 这道题目主要考三点共线的向量运算，

因为 B, P, N 三点共线，且 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AN}$ ，

所以 $m + \frac{8}{9} = 1$ ，所以 $m = \frac{1}{9}$ ，

故选 B。

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则

9. 已知向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 满足 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AB}| = 2$ ， $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ ，若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ 且 $\lambda + \mu = 1 (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ ，则 $|\overrightarrow{OC}|$ 的最小值为 ()。

A. 1

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$ **【答案】** D**【解析】** $|\overrightarrow{OC}|^2 = (\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB})^2 = [\lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}]^2$

$$= 4\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$$

$$\because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OC}|^2 = 4\lambda^2 + 4(1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cdot 2 = 4\lambda^2 - 4\lambda$$

$$= 4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + 3,$$

$$\text{当且仅当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } |\overrightarrow{OC}|_{\min} = \sqrt{3}.$$

故选 D。

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律

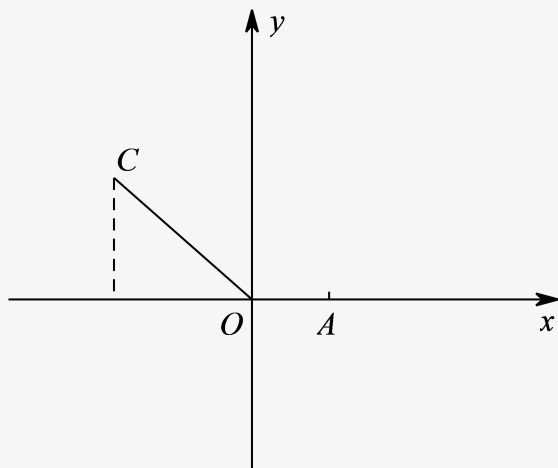
二、填空题

10. 已知两点 $A(1, 0)$ ， $B(1, \sqrt{3})$ ， O 为坐标原点，点 C 在第二象限，且 $\angle AOC = 120^\circ$ ，设

$$\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R}), \text{ 则 } \lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 1

【解析】 如图，



设 $|OC| = c$ ，根据 $\angle AOC = 120^\circ$ ；

$$\therefore C\left(-\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) ;$$

$\therefore$ 由 $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ 及 A, B 点坐标得：

$$\left(-\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = -2(1, 0) + \lambda(1, \sqrt{3}) ;$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}c = \lambda - 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c = \sqrt{3}\lambda \end{cases} ;$$

解得 $\lambda = 1$.

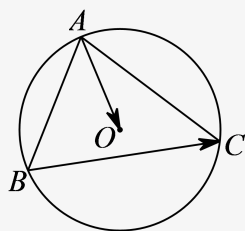
故答案为：1 .

【标注】 【知识点】 平面向量加、减、数乘的坐标运算

11. O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，若 $AC = 3$ ， $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$ ，则 $AB =$ _____ .

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 如图，



$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 2 ,$$

$$\because AC = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} \times 3^2 - 2 = \frac{5}{2}, \text{ 则 } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5},$$

$$\therefore AB = \sqrt{5}.$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】向量的数量积的定义；利用向量数量积求模长

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为 _____.

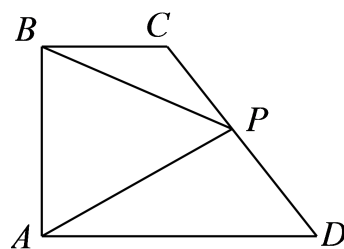
【答案】 $\frac{3}{11}$

【解析】 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 则

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC})(\lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{\lambda}{3} \times 3 + \frac{2\lambda}{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times 9 - \frac{2}{3} \times 3 = -4 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{11}$$

【标注】【知识点】线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义

13. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = AD = 4$, $BC = 2$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$, 则 $|\overrightarrow{PA}| =$ _____.



【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】 由题意可得, $BC \parallel AD$, $BC = 2$, $AD = 4$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},$$

因为 P 为 CD 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DC} = -\lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}),$$

$$= (\lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC}) \cdot [(1-\lambda)\overrightarrow{AB} + (2-\lambda)\overrightarrow{CB}] = 5,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\text{且 } AB = 4, BC = 2,$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{1}{2};$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{BC},$$

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{PD^2 + 4BC^2 - 4\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC}} = \sqrt{13};$$

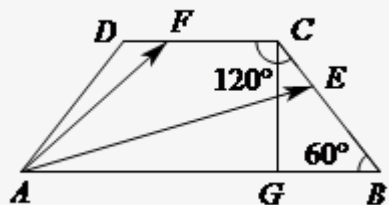
故答案为: $\sqrt{13}$.

【标注】【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{29}{18}$

【解析】



$$\because AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}, CD = 2 - 1 = 1, \angle BCD = 120^\circ.$$

$$\because \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF})$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$$

$$= 2 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times \cos 0^\circ + \frac{2}{3} \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times \cos 120^\circ$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{29}{18}.$$

故答案为: $\frac{29}{18}$.

【标注】【知识点】平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）；线性运算和数量

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的边长分别为 a, b, c , 若 $|\vec{CA} - \vec{CB}| = 3, \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 6$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{33}}{4}$

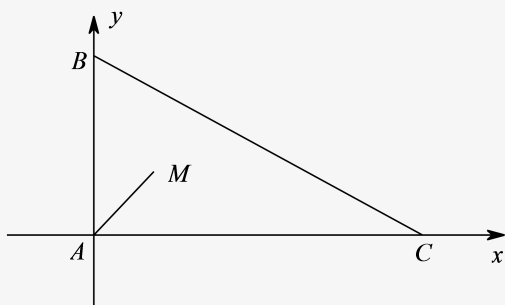
【解析】 $|\vec{CA} - \vec{CB}| = 3, \vec{CA}^2 + \vec{CB}^2 - 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 9,$
 即 $b^2 + a^2 - 2ab \cos C = 9,$
 $b^2 + a^2 = 21,$
 $ab \cos C = 6, \cos C = \frac{6}{ab}, \sin C = \sqrt{1 - \frac{36}{a^2b^2}},$
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - 36},$
 $\because a^2 + b^2 = 21,$
 $\therefore 21 = a^2 + b^2 \geq 2ab,$
 $\therefore ab \leq \frac{21}{2},$
 $\therefore S_{\triangle ABC} \text{最大值} : \frac{3\sqrt{33}}{4}.$
 故答案为: $\frac{3\sqrt{33}}{4}.$

【标注】【知识点】求面积最值或范围问题

16. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{2}, AB = 1, AC = 2, M$ 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $AM = \frac{1}{2}$, 若 $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则 $\lambda + 2\mu$ 的最大值 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 如图建立平面直角坐标系, 则 $A(0,0), B(0,1), C(2,0),$



$$\begin{aligned}
& M\left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \\
& \therefore \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \\
& \therefore \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right) = \lambda(0, 1) + \mu(2, 0). \\
& \therefore \lambda = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad 2\mu = \frac{1}{2}\cos\theta, \\
& \text{则 } \lambda + 2\mu = \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \\
& \therefore \text{当 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \lambda + 2\mu \text{ 最大值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
& \text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】向量系数求最值或范围问题