

平面向量数量积运算

一轮整合计划

向量共线的条件是什么？

如果 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，则_____；反之，如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，且 $\vec{b} \neq \vec{0}$ ，则一定存在唯一的一个实数 λ ，使_____。

向量的坐标运算有哪些公式？

设 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，则：

(1) $\vec{a} + \vec{b} =$ _____；

(2) $\vec{a} - \vec{b} =$ _____；

(3) $\lambda \vec{a} =$ _____。

一、平面向量的数量积

概念

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 叫做向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 。

备注：数量积运算的结果为数，而非向量。

(1) $|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影；

(2) $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影；

(3) 数量积的几何意义：其中一个向量在另一向量上的投影与后者的模的乘积。

平面向量数量积运算律

(1) 交换律

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

(2) 结合律

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

(3) 分配律

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

(4)应用运算律得到的两个重要结论:

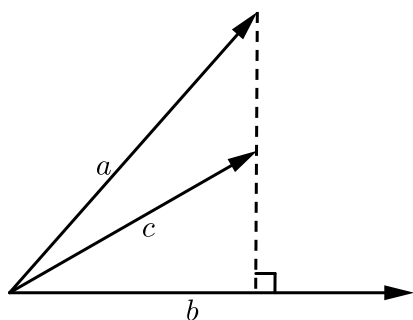
$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2,$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

【温馨提示】

①两向量的数量积不是向量而是数量,要准确区分两向量数量积、数乘向量和实数与实数乘积间的运算性质.

②若 $a, b, c (b \neq 0)$ 为实数,则 $ab = bc \Rightarrow a = c$;但对于向量,就不正确,即 $a \cdot b = b \cdot c \nRightarrow a = c$,由下图可以看出.



③数量积的运算只适合交换律、加乘分配律及数乘结合律,但不适合乘法结合律,即 $(a \cdot b)c$ 不一定等于 $a(b \cdot c)$.这是因为 $(a \cdot b)c$ 表示一个与 c 共线的向量,而 $a(b \cdot c)$ 表示一个与 a 共线的向量,而 c 与 a 不一定共线.

坐标表示、模、夹角

若 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

若 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 则 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

1. 已知 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 求:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(2) $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

(3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$.

(4) $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2. 已知向量 $\vec{a} = (1, n)$, $\vec{b} = (-1, n)$, 若 $2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 则 $|\vec{a}| = ()$.
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

二、平面向量数量积应用

1. 平面向量的数量积的性质和运算律的应用

根据数量积的运算律可知实数中的有些公式、结论对向量仍成立, 如:

$$(1) (a \pm b)^2 = |a \pm b|^2 = |a|^2 \pm 2a \cdot b + |b|^2 = a^2 \pm 2a \cdot b + b^2;$$

$$(2) a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) = |a|^2 - |b|^2;$$

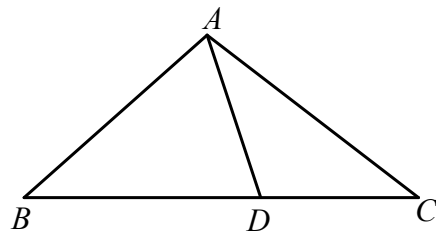
$$(3) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(|a|^2 + |b|^2);$$

$$(4) a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0;$$

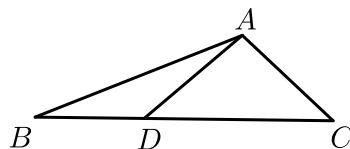
(5) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$, 当且仅当 a 与 b 同向共线时右边等号成立, a 与 b 反向共线时左边等号成立.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$, $AB = 2$, $AC = 1$, E, F 为 BC 边的三等分点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = ()$.
- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{26}{9}$

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $\vec{BC} = \sqrt{3}\vec{BD}$, $|\vec{AD}| = 1$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

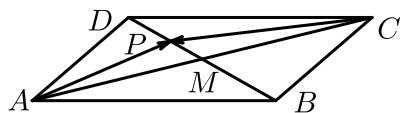


5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上的一点, $DC = 2BD$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC$, $DF = \mu DC$. 若 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1$, $\vec{CE} \cdot \vec{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu = ()$.
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{7}{12}$

7. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M , 点 P 是 MD 的中点. 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} =$ _____ .



2. 解决向量夹角问题的方法

(1) 求向量的夹角时常利用公式 $\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, 其中 $\theta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为锐角, 则 $0 < \cos\theta < 1$,

$$\therefore 0 < \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} < 1.$$

若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为钝角, 则 $-1 < \cos\theta < 0$,

$$\therefore -1 < \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} < 0.$$

若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为直角, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

(2) 依据两向量夹角 θ 的取值情况, 求向量坐标中的参数时, 需注意当夹角 θ 为 0° 时, $\cos\theta = 1 > 0$; 当夹角 θ 为 180° 时, $\cos\theta = -1 < 0$, 这是容易忽略的特殊情况.

8. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个非零向量, 同时满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 求 $\vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角.

9. 已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$, 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$.

(1) 求 $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$.

(2) 求 $3\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角 θ 的大小.

10. 已知向量 $\vec{a} = (-2, -1)$, $\vec{b} = (\lambda, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 试求实数 λ 的取值范围.

11. 已知点 $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为().

A. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$
C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$
D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -6$, 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____ .

3. 求向量的模

求向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ 的模有两种方法:

(1) $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

(2) $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

13. 已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, 求 $|\vec{a} + \vec{b}|$.

14. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, y)$, $\vec{c} = (2, -4)$ 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ () .

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{10}$

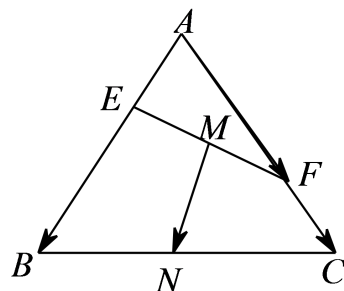
C. $2\sqrt{5}$

D. 10

15. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 向量 $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 的最大值是 _____ .

16. 若 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____ .

17. 如图, 在边长为1的正三角形 ABC 中, E, F 分别为边 AB, AC 上的动点, 且满足 $\vec{AE} = m\vec{AB}$, $\vec{AF} = n\vec{AC}$, 其中 $m, n \in (0, 1)$, $m + n = 1$, M, N 分别是 EF, BC 的中点, 则 $|\vec{MN}|$ 的最小值为 () .



A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

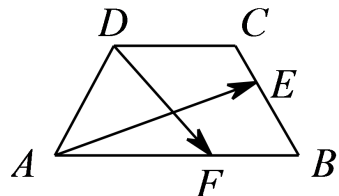
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{5}{3}$

4. 利用向量的数量积为零表示垂直关系

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ (其中 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$).

18. 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = CD = 2$, 若 E, F 分别是边 BC, AB 上的点, 且满足 $\frac{BE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \lambda$, 当 $\vec{AE} \cdot \vec{DF} = 0$ 时, 则有 () .



A. $\lambda \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

B. $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$

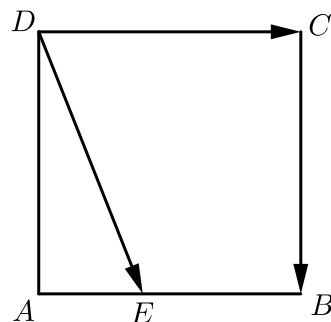
- C. $\lambda \in \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$
 D. $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$

19. 在 $\triangle PQR$ 中, $\overrightarrow{PQ} = (2, 3)$, $\overrightarrow{PR} = (1, k)$, 且 $\triangle PQR$ 的一个内角为直角, 求 k 的值.

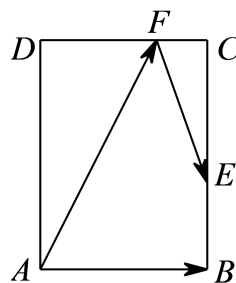
5. 建立平面直角坐标系, 利用坐标运算解向量问题

当几何图形中有垂直关系时, 可建立平面直角坐标系, 利用坐标运算求向量的数量积或长度.

20. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为 ____; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 ____.



21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 CD 上, 若 $\overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CE} = \lambda^2 \overrightarrow{CB}$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FE}$ 的最大值为 ____.



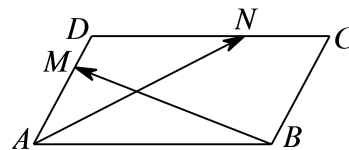
22. 在等腰梯形中, $AB \parallel CD$, $AB = 2$, $AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 且 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$, 则 $\lambda =$ ____.

23. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2$, $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, DE 的延长线交 CA 的延长线于点 F , 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 ____.

24. 在直角梯形中 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel CD$, $AB = 3$, $BC = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, 动点 E, F 分别在线段 BC 和 CD 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC} = 2\lambda \overrightarrow{DF}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为 ____.

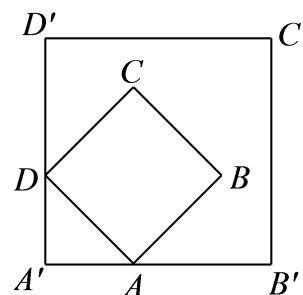
25.

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 2$ ， $AD = 1$ ，若 M 、 N 分别是边 AD 、 CD 上的点，且满足 $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{DC} = \lambda$ ，其中 $\lambda \in [0, 1]$ ，则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围是（ ）。



- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, -1]$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 3]$

26. 如图所示，边长为1的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 D 分别在边长为2的正方形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$ 和 $A'D'$ 上移动，则 $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C}$ 的最大值是（ ）。



- A. 2 B. $1 + \sqrt{2}$ C. π D. 4