

平面向量定义与线性运算

一、习题训练

1. 下列说法正确的是（ ）.

- A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量, 则 A, B, C, D 必在同一直线上
- B. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反
- C. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 是两平行向量
- D. 单位向量都相等

【答案】 C

【解析】 A 选项: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 是共线向量, 则 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 平行或 A, B, C, D 共线, A错误;

B 选项: 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 有一个向量为零向量, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向无法判定, 因为零向量方向是任意的, B错误;

C 选项: 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 是两平行向量, 正确;

D 选项: 单位向量大小相等, 但方向不一定相同, 故不一定相等, D错误.

故选 C.

【标注】 【知识点】 共线向量; 单位向量; 相等向量与相反向量

2. 已知向量 $\vec{a} = (-3, 4)$, 则向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量是（ ）.

- A. $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
- B. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
- C. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
- D. $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

【答案】 B

【解析】 与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量是 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

故选B.

【标注】 【知识点】 单位向量

3. 判断下列各命题的真假:

- ①向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等；
 ②向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行，则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向相同或相反；
 ③两个有共同起点而且相等的向量，其终点必相同；
 ④两个有公共终点的向量，一定是共线向量；
 ⑤向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则点 A 、 B 、 C 、 D 必在同一条直线上；
 ⑥有向线段就是向量，向量就是有向线段。

其中假命题的个数为（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】 C

【解析】 ①真命题；②假命题，若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中有一个为零向量时，其方向是不确定的；③真命题；④假命题，终点相同并不能说明这两个向量的方向相同或相反；⑤假命题，共线向量所在直线可以重合，也可以平行；⑥假命题，向量可用有向线段来表示，但并不是有向线段。

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的共线；平面向量中的三点共线问题；相等向量与相反向量

4. 对于向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 和实数 λ ，下列陈述中正确的是（ ）。

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$
 B. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{b} = \vec{c}$
 C. 若 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$
 D. 若 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ ，则 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$

【答案】 D

【解析】 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ ，A错；
 若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 $\vec{b} \neq \vec{c}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，B错；
 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，但 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向不同，也能使 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ ，C错。
 故选D。

【标注】【知识点】零向量；平面向量数量积的运算律；平面向量数量积运算（非坐标）

5. 对于向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 和实数 λ ，下列命题中正确的命题是（ ）。

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$

- B. 若 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$
 C. 若 $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$
 D. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$

【答案】 B

【解析】 A 选项: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 可得 $|\vec{a}| = 0$ 或 $|\vec{b}| = 0$ 或 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$, 故 A 错误;

B 选项: 由 $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ 可得 $\lambda = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$, 故 B 正确;

C 选项: $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ 可得 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 和方向无关, 故 C 错误;

D 选项: 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 可得 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{a}| = 0$ 或 $\vec{b} = \vec{c}$ 或 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$, 故 D 错误.

故选 B.

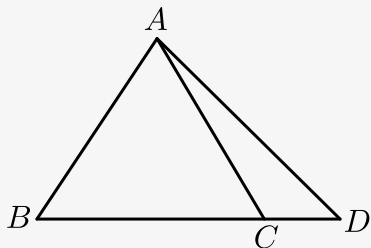
【标注】 【知识点】 平面向量运算律辨析问题

6. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\vec{BC} = 3\vec{CD}$, 则 ().

- A. $\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$
 B. $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$
 C. $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$
 D. $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

【答案】 A

【解析】 方法一: 如图,



$$\text{则 } \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{4}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}.$$

故选: A.

方法二: $\vec{BC} = 3\vec{CD}$, 换成以 A 为起点,

$$\therefore \vec{AC} - \vec{AB} = 3(\vec{AD} - \vec{AC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC},$$

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）

7. 设非零向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 满足 $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, 如果平面向量 $\vec{b}_i$ 的模是向量 $\vec{a}_i$ 的模的二倍, 且向量 $\vec{a}_i$ 顺时针旋转 30° 后与向量 $\vec{b}_i$ 同向 (其中 $i = 1, 2, 3$), 则 ().

- A. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 = \vec{0}$
 B. $\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{0}$
 C. $-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{0}$
 D. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \vec{0}$

【答案】D

【解析】因为 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 是分别经过 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 进行相同的变化得到的,
 $\therefore \vec{b}_i (i = 1, 2, 3)$ 之间的位置关系与 $\vec{a}_i (i = 1, 2, 3)$ 之间的位置关系相同, 排除A, B, C.
 故选D.

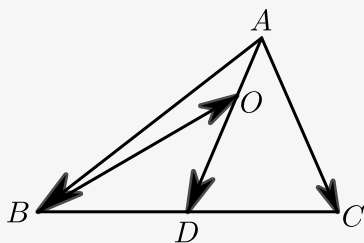
【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则; 平面向量线性运算综合（非坐标）

8. 设D为 $\triangle ABC$ 中BC边上的中点, 且O为AD边上靠近点A的三等分点, 则 ().

- A. $\overrightarrow{BO} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
 B. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
 C. $\overrightarrow{BO} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
 D. $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

【答案】C

【解析】如图所示:



$\therefore D$ 为 $\triangle ABC$ 中BC边上的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

又 $\because O$ 为 AD 边上靠近点 A 的三等分点,

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BO} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）

9. 向量 $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, m)$, 若 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 $m = (\quad)$.

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

【答案】 D

【解析】 $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, -1 - 2m)$,

$$\because (\vec{a} - 2\vec{b}) \perp \vec{a},$$

$$\therefore (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0,$$

$$\therefore 3 + 1 + 2m = 0,$$

$$m = -2.$$

故选D.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

10. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, k)$, $\vec{a} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $k = (\quad)$.

A. -8

B. -6

C. 6

D. 8

【答案】 A

【解析】 由 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, k)$, 得 $2\vec{a} + \vec{b} = (3, 2 + k)$,

$$\text{由 } \vec{a} \perp (2\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\text{所以 } 2 \times 3 + 1 \times (2 + k) = 0,$$

$$\text{所以 } k = -8,$$

故选：A.

【标注】【知识点】数量积的坐标表达式；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；平面向

量数量积运算（非坐标）；坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算

11. 设向量 $\vec{a} = (-3, 4)$ ，向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向相反，且 $|\vec{b}| = 10$ ，则向量 $\vec{b}$ 的坐标为（ ）。

A. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$
C. $\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

B. $(-6, 8)$

D. $(6, -8)$

【答案】D

【解析】 $\because \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反；

$$\therefore \text{设 } \vec{b} = \lambda \vec{a} = \lambda(-3, 4), \lambda < 0.$$

$$\text{又 } |\vec{b}| = 10;$$

$$\therefore 5\lambda = 10;$$

$$\therefore \lambda = -2;$$

$$\therefore \vec{b} = (6, 8).$$

故选：D.

【标注】【知识点】向量的模；利用向量数量积求模长

12. 设向量 $\vec{a} = (1, -2)$ ， $\vec{b} = (0, 1)$ ，向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 垂直，则实数 $\lambda =$ （ ）。

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. -1

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】由题意得 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = (\lambda, -2\lambda + 1)$ ， $\vec{a} + 3\vec{b} = (1, 1)$ ，

$\therefore$ 向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与向量 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 垂直，

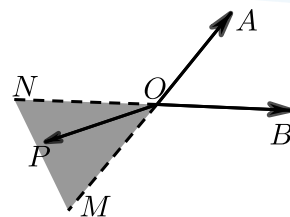
$$\therefore \lambda + (-2\lambda + 1) \cdot 1 = 0,$$

$$\therefore \lambda = 1.$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；坐标表示平面向量的垂直；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；数量积的坐标表达式

13. 如图所示，点P在 $\angle AOB$ 的对角区域MON的阴影内，且满足 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ，则实数对 (x, y) 可以是（ ）。



A. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
 C. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
 D. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$

【答案】 C

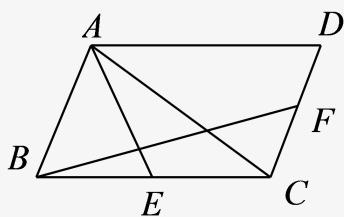
【解析】 略.

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；向量分解中的待定系数法

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中 E 为 BC 的中点, F 为 DC 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{BF}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ____ .

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】 如图,



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \lambda \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) + \mu \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu \right) \overrightarrow{AD},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{6}{5}, \mu = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5}.$$

故答案为: $\frac{8}{5}$.

【标注】【知识点】平面几何中的向量方法；平面向量基本定理及其意义；线性运算和数量积综合

问题；平面向量数量积的运算律