

平面向量定义与线性运算

一轮整合计划

三角函数的图像和性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域			
值域			
对称轴			
对称中心			
奇偶性			
最小正周期			
单调递增区间			
单调递减区间			

请默写和差倍角公式和辅助角公式

和差角公式：

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\text{变形形式} \tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta) \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$$

倍角公式：

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\text{变形形式} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\text{变形形式 } \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

辅助角公式：

$$y = a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

其中 φ 所在的象限由 a 、 b 的符号确定， φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定。

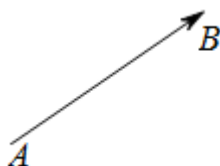
一、 平面向量的基本概念

1. 向量的概念：我们把具有大小和方向的量称为向量。

2. 向量的表示：

① 几何表示法：用有向线段表示向量，有向线段的方向表示向量的方向，线段的长度表示向量的长度。

② 字母表示法： $\overrightarrow{AB}$ ，注意起点在前，终点在后。



3. 相等和相反向量：

① 同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量。

② 与向量 $\vec{a}$ 方向相反且等长的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$ 。

4. 共线或平行向量：通过有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的直线，叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的基线。如果向量的基线互相平行或重合，则称这些向量共线或平行。向量 $\vec{a}$ 平行于向量 $\vec{b}$ ，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 。

5. 零向量：长度等于零的向量，叫做零向量。记作： $\vec{0}$ 。

零向量的方向不确定，零向量与任意向量平行。

6. 单位向量：长度等于1的向量叫做单位向量。

7. 向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(或长度)叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

1. 下列向量中不是单位向量的是 ()。

A. $(-1, 0)$

B. $(1, 1)$

C. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} (|\vec{a}| \neq 0)$

D. $(\cos 2019^\circ, \sin 2019^\circ)$

【答案】 B

【解析】 根据向量模长公式得 $(1, 1)$ 向量的模长为 $\sqrt{2}$ ，不是单位向量。
故选B。

【标注】 【知识点】 单位向量

2. 下列命题正确的是（ ）。

- A. 若 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 都是单位向量，则 $\vec{a} = \vec{b}$
- B. 若 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ，则四点A、B、C、D构成平行四边形
- C. 若 $\vec{b} = -2\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$)，则 $\vec{a}$ 是 $\vec{b}$ 的相反向量
- D. $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 是两平行向量

【答案】 D

【解析】 A选项： $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 都是单位向量，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，方向不一定相同，所以 $\vec{a}$ 不一定等于 $\vec{b}$ ；

B选项： $\because \vec{AB} = \vec{DC}$ ， $\therefore |\vec{AB}| = |\vec{DC}|$ 且 $\vec{AB}$ 与 $\vec{DC}$ 同向，则四点可能共直线或构成平行四边形；

C选项： $\vec{b} = -2\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$)，则 $\vec{a}$ 是 $\frac{1}{2}\vec{b}$ 的相反向量；

D选项： $\because \vec{AB} = -\vec{BA}$ ，所以 $\vec{AB}$ 与 $\vec{BA}$ 是相反向量，相反向量属于平行向量。
故选D。

【标注】 【知识点】 平面向量概念辨析问题；共线向量

3. 下列说法中，正确的是（ ）。

- A. 只有方向相同或相反的向量是平行向量
- B. 零向量的长度为0
- C. 长度相等的两个向量是相等向量
- D. 共线向量是在一条直线上的向量

【答案】 B

【解析】 零向量的方向是任意的，与任何向量共线，故A项错；长度相等的两个向量，它们的方向不一定相同，故C项错；共线向量所在的直线平行或重合，故D项错；很明显B项正确。

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题；零向量

4. 下列命题中，是假命题的是（ ）.

- A. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- B. k 为实数，若 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，则 $k=0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$
- C. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 垂直
- D. $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，若 $n\vec{a} = m\vec{b}$ ($m, n \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq n$)，则 $\vec{a} \neq \vec{b}$

【答案】C

【解析】若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直， $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 垂直或平行.

【标注】【知识点】平面向量概念辨析问题

5. 下列说法中正确的是（ ）.

- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{b} = \vec{c}$
- B. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$
- C. 若不平行的两个非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$
- D. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

【答案】C

【解析】对于A， $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，如果 $\vec{a} = \vec{0}$ ，则 $\vec{b} \neq \vec{c}$ ，也可能 $\vec{b} = \vec{c}$ ， $\therefore$ A不正确；

对于B，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ ，或 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $\therefore$ B不正确；

对于C，若不平行的两个非零向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ， $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ ，则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，故C正确；

对于D，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ， $\therefore$ D不正确.

故选：C.

【标注】【知识点】平面向量运算律辨析问题

6. 以下说法错误的是（ ）.

- A. 零向量与任一非零向量平行
- B. 零向量与单位向量的模不相等
- C. 平行向量方向相同
- D. 平行向量一定是共线向量

【答案】C

【解析】方向相反的向量也是平行向量，故选C．

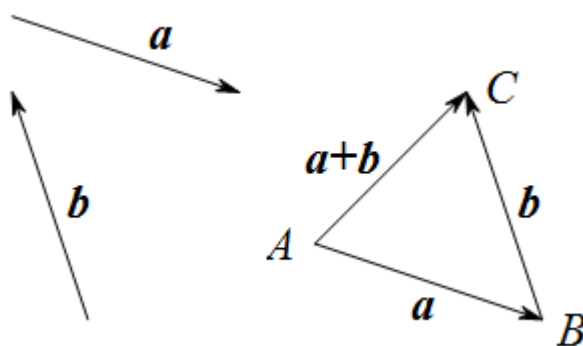
【标注】【知识点】零向量

二、平面向量的线性运算

加法

(1) 三角形法则

如下图：



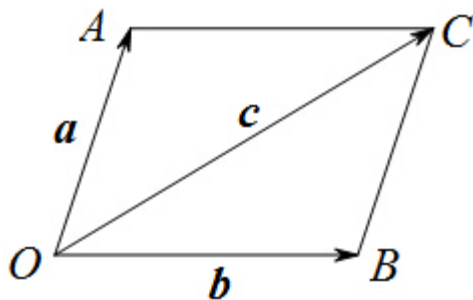
已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，在平面内任取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a} + \vec{b}$ ，即 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 。

求两个向量和的运算，叫做向量的加法。这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则。

位移的合成可以看作向量加法三角形法则的物理模型。

(2) 平行四边形法则

如下图：



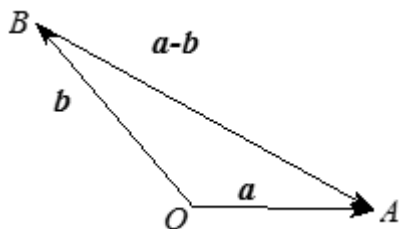
以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为邻边作 $ABCD$ ，则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则。

(3) 向量求和的多边形法则：

已知 n 个向量，依次把这 n 个向量首尾相连，以第一个向量的始点为始点，第 n 个向量的终点为终点的向量叫做这个向量的和向量。这个法则叫做向量求和的多边形法则。

 减法

如果把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是以减向量的终点为始点，被减向量的终点为终点的向量．又或者一个向量减去另一个向量等于加上这个向量的相反向量．



推论：一个向量 $\overrightarrow{BA}$ 等于它的终点相对于点的位置向量 $\overrightarrow{OA}$ 减去它的始点相对于点的位置向量 $\overrightarrow{OB}$ ，或简记“终点向量减始点向量”。

数乘运算

数乘向量：实数 λ 和向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$ ，且 $\lambda\vec{a}$ 的长为 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ 。

 共线

如果 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 反之, 如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 且 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 则一定存在唯一的一个实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

7. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{b} = 2\vec{a}$, 如果 $\vec{a} = (1, 2)$, 那么 $\vec{b}$ 等于().
- A. $(-2, -4)$ B. $(-2, 4)$
C. $(2, -4)$ D. $(2, 4)$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{b} = 2\vec{a}, \vec{a} = (1, 2)$,

$$\therefore \vec{b} = 2(1, 2) = (2, 4) .$$

故选D.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

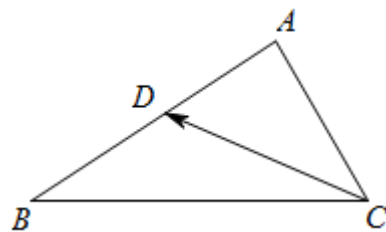
8. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (1, \lambda)$, 若 $\vec{c} // (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 λ 为 ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

【答案】 A

【解析】 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$,
 $\therefore \vec{c} // (2\vec{a} + \vec{b})$,
 $\therefore 4\lambda - 2 = 0$,
 $\therefore \lambda = \frac{1}{2}$.
 故选A .

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

9. 如图， D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 等于（ ） .



- A. $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- B. $\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- C. $-\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- D. $-\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

【答案】 C

【解析】 $\because D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点， $\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$
 $\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$,
 $\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 故选C .

【标注】【知识点】平面向量基本定理及其意义；平面向量中的三点共线问题

10. 设 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是非零向量，则 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的（ ） .

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】

若 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，充分性成立．反之，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，不一定有 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 成立，必要性不成立．所以 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充分而不必要条件．故选 A．

【标注】【知识点】充要条件与向量结合；平面向量概念辨析问题；共线向量

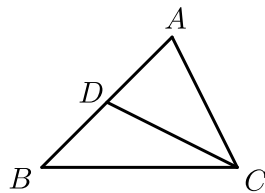
11. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$ ， $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ，则 $\vec{AD} + \vec{AP} = (\quad)$ ．
- A. $\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
 B. $\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
 C. $\frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
 D. $\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}$

【答案】 A

【解析】 $\because \vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB}$ ， $\vec{CP} = \vec{AP} - \vec{AC}$ ， $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$ ，
 $\therefore 3\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{AC}$ ，即 $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ ．
 $\because \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ ，
 $\therefore \vec{AD} + \vec{AP} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ ．
 故选 A．

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

12. 如图所示， D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，则向量 $\vec{CD} = (\quad)$ ．



- A. $-\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$
 B. $-\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$
 C. $\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{BA}$
 D. $\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$

【答案】 A

【解析】 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

故选A.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量基本定理及其意义

13. 设P是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点， $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP}$ ，则（ ）.

A. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

D. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

【答案】 B

【解析】 方法一： $\because \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BP}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA},$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP},$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{AP} = \vec{0},$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}.$$

方法二：由向量加法的平行四边形法则易知， $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的和向量过AC边中点，长度是AC边中线长的二倍，结合已知条件可知P为AC边中点，故 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

14. 已知正方形ABCD中，点E，F分别是DC，BC的中点，那么 $\overrightarrow{EF} =$ （ ）.

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

【答案】 D

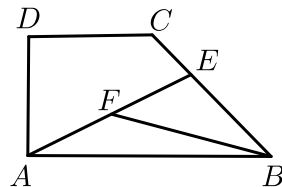
【解析】 $\because E, F$ 分别是DC、BC的中点，

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

故选D .

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的减法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则

15. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB = 2AD = 2DC$ ， $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ ， F 为 AE 的中点，则 $\overrightarrow{BF} =$ () .



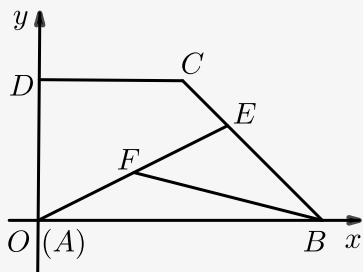
- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
 B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
 C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
 D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

【答案】 C

【解析】 方法一： $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ ，
 $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$ ，
 $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ ，
 $= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

$\therefore$ 选C .

方法二：建立如图所示的平面直角坐标系 .



令 $AD = DC = 1$ ，

则 $A(0,0)$ ， $B(2,0)$ ， $C(1,1)$ ， $D(0,1)$.

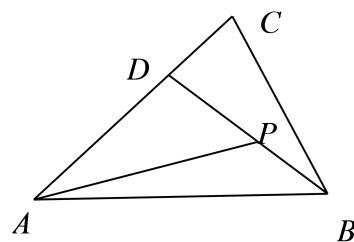
设 $E(a,b)$ ，则 $\overrightarrow{EC} = (1-a, 1-b)$ ， $\overrightarrow{BC} = (-1,1)$.

$\because \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ ，

$$\begin{aligned} &\therefore \begin{cases} -1 = 3(1-a) \\ 1 = 3(1-b) \end{cases}, \\ &\text{解得} \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}, \\ &\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right). \\ &\therefore F \text{ 为 } AE \text{ 的中点}, \\ &\therefore F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \\ &\therefore \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ &\text{又} \therefore \overrightarrow{AB} = (2, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 1), \\ &\therefore \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}(2, 0) + \frac{1}{3}(0, 1). \\ &\text{即 } \overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \\ &\therefore \text{选 C}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的减法运算及运算规则

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ，若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为 _____ .



【答案】 3

【解析】 法一： $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ ， $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ ，
 $\therefore \lambda = \frac{2}{3}$ ， $\mu = \frac{2}{9}$ ，

$$\text{则 } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} \div \frac{2}{9} = 3,$$

故答案为:3.

法二:如图过点P分别作AB, AC的平行线, 分别交AC于点C₁, 交AB于点B₁

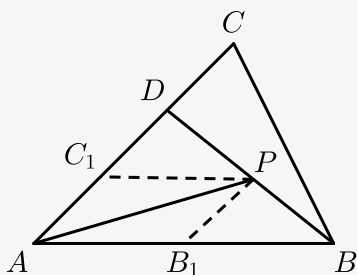
$$\frac{AC_1}{AO} = \frac{BP}{BD} = \frac{1}{3}, \text{ 由 } \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } \frac{AC_1}{AC} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{BD}{BP} = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC_1} = \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{则 } \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{9}, \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = 3.$$



【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则;平面向量线性运算综合(非坐标)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$.

(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CA}$ 方向上的投影.

(2) 求实数 λ 的值.

【答案】 (1) $-\frac{3}{2}$.

(2) $\frac{3}{11}$.

【解析】 (1) $|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos A = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CA}$ 方向上投影为 $-\frac{3}{2}$.

(2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$,

因为 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$,

所以 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC})$,

所以 $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$,

$$\text{整理得: } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \cdot (\lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -4 \text{ ①},$$

$$\text{因为 } AB = 3, AC = 2, \angle A = 60^\circ,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2, \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 代入①式, 解得 } \lambda = \frac{3}{11}.$$

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；向量的投影

三、平面向量的基本定理

基本定理

如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ 。

我们把不共线的向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

小结论：已知 A 、 B 是直线 l 上的任意两点， O 是 l 外一点，则对直线 l 上任意一点 P ，存在实数 t ，使 $\overrightarrow{OP}$ 关于基底 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ 的分解式为 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

18. 在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是（ ）。

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$
- B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$
- C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$
- D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = (-2, 3)$

【答案】 B

【解析】 排除A项：若 $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (5, -2)$ ，

设存在实数 λ, μ ，使得 $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ ，

$$\text{则 } (3, 2) = \lambda(-1, 2) + \mu(5, -2),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3 = -\lambda + 5\mu \\ 2 = 2\lambda - 2\mu \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}, \text{ 则 } \vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

符合题意；易知C，D项为共线向量，排除C，D项。

故选B。

【标注】【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示；坐标表示平面向量的共线

 坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1),$$

若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

19. 已知点 $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ 和向量 $\vec{a} = (2, \lambda)$, 若 $\vec{a} // \overrightarrow{AB}$, 则实数 λ 的值为 ().

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】根据 A, B 两点坐标, 可得 $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$,

$$\because \vec{a} // \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore 2 \times 1 - 3\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3}.$$

故选C.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

20. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = ()$.

A. $(3, 0)$

B. $(2, 0)$

C. $(-3, 3)$

D. $(3, 3)$

【答案】D

【解析】 $2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2) - (-1, 1) = (3, 3)$.

故选D.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

21. 与 $\vec{a} = (12, 5)$ 平行的单位向量为 ().

A. $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

- B. $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
 C. $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
 D. $\left(\pm\frac{12}{13}, \pm\frac{5}{13}\right)$

【答案】 C

【解析】 与 $\vec{a}$ 共线的单位向量即为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 或 $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ，因为 $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ，所以与 $\vec{a} = (12, 5)$ 平行的单位向量为 $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ 。

【标注】 【知识点】坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

22. 已知点 $A(-1, -2)$ ， $B(3, 8)$ ，若 $\vec{AB} = 2\vec{AC}$ ，则点 C 的坐标为 _____。

【答案】 (1, 3)

【解析】 $\because \vec{AB} = 2\vec{AC}$ ，
 $\therefore \vec{OC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(2, 6) = (1, 3)$ 。
 故答案为：(1, 3)。

【标注】 【知识点】平面向量的正交分解及坐标表示；坐标表示平面向量的共线；坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

23. 已知 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -2)$ ，若 $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ ($m, n \in \mathbf{R}$)，则 $m - n$ 的值为 ()。

A. 2 B. -2 C. 3 D. -3

【答案】 D

【解析】 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -2)$ ，
 $m\vec{a} + n\vec{b} = (2m + n, m - 2n)$ ， $m\vec{a} + n\vec{b} = (9, -8)$ ($m, n \in \mathbf{R}$)，
 可得 $\begin{cases} 2m + n = 9 \\ m - 2n = -8 \end{cases}$ ，
 可得 $m = 2$ ， $n = 5$ 。
 $m - n = -3$ 。
 故选 D。

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量加、减、数乘的坐标运算

24. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (4, -2)$, $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则 $\lambda = ()$.
- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【答案】A

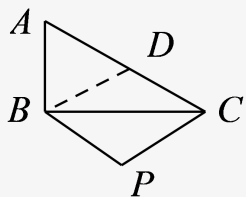
【解析】由已知, 得 $\lambda\vec{a} + \vec{b} = (\lambda + 4, -3\lambda - 2)$, $\therefore (\lambda\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$,
 $\therefore \lambda + 4 + (-3) \times (-3\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

25. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\vec{AB} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$, $|\vec{AB}| = |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $()$.
- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】方法一： $\because \vec{AB} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$,
 $\therefore \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{BA}$,
且 $\vec{PB} - \vec{PC} = \vec{CB}$,
 $\therefore 2\vec{PB} = \vec{CA}$,
 $2\vec{PC} = \vec{BA} + \vec{BC}$,
 $\therefore PB \parallel \frac{1}{2}AC$.
又 $\because PB = 2$,
 $\therefore AC = 4$,
 $\therefore \triangle ABC$ 如图所示, 取 AC 中点 D , 可和 $BP \parallel CD$,



$\therefore$ 平行四边形 $CDBP$,
 $\therefore BD = PC = 2$.

$$\text{又} \because AD = AB = BD = 2,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ.$$

$$\text{又} \because AB = 2, AC = 4,$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 2\sqrt{3}.$$

故选B.

$$\text{方法二: 因为 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}),$$

由平行四边形法则可知, 以 $\overrightarrow{PB}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ 为边组成的平行四边形的一条对角线与 $\overrightarrow{AB}$, 且长度相等,

因为 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 2$, 所以以 $\overrightarrow{PB}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ 为边的平行四边形为菱形, 且除 BC 外的对角线长为2,

$$\text{所以 } BC = 2\sqrt{3}, \angle ABC = 90^\circ, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

故选B.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则

26. 已知O是平面内一定点, A、B、C是平面内不共线的三个点, 若动点P满足

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty), \text{ 则 } P \text{ 点的轨迹一定通过 } \triangle ABC \text{ 的 ()}.$$

A. 外心

B. 内心

C. 重心

D. 垂心

【答案】 B

【解析】 由已知得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, 即 $\overrightarrow{AP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$.

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \text{ 分别是与 } \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{AC} \text{ 同向的单位向量,}$$

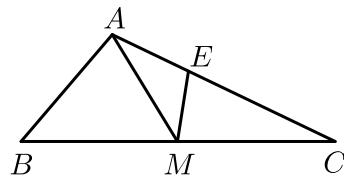
$$\therefore \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \text{ 与 } \angle BAC \text{ 的平分线共线.}$$

$$\therefore \lambda \in [0, +\infty), \therefore \overrightarrow{AP} \text{ 与 } \angle BAC \text{ 的平分线共线,}$$

$\therefore$ 点P的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心.

【标注】【知识点】平面向量与三角形的“心”

27. 已知点 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 点 E 在边 AC 上, 且 $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{AE}$, 则向量 $\overrightarrow{EM} = (\quad)$.



- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
 B. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$
 D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

【答案】 B

【解析】 由题意得 $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
 故选B.

【标注】【知识点】平面向量的加法运算及运算规则；平面向量的数乘运算及运算规则；平面向量线性运算综合（非坐标）

28. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{c} + \vec{a}) // \vec{b}$, $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\vec{c} = (\quad)$.
- A. $\left(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3}\right)$
 B. $\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{3}\right)$
 C. $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{9}\right)$
 D. $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9}\right)$

【答案】 A

【解析】 设 $\vec{c} = (x, y)$, 由 $(\vec{c} + \vec{a}) // \vec{b}$ 得 $-3(x+1) - 2(y+2) = 0$ ①, 由 $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ 得 $3x - y = 0$ ②, 联立①②得 $x = -\frac{7}{9}$, $y = -\frac{7}{3}$, 则 $\vec{c} = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3}\right)$, 故选A.

【标注】【知识点】利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）；坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线

29.

已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$, 如果 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 那么实数 $\lambda =$ () .

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 C

【解析】 $\because$ 向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$,

$$\therefore \vec{m} = (0, -3), \vec{n} = (1 + \lambda, -2 + \lambda),$$

$$\because \vec{m} \perp \vec{n},$$

$$\therefore \vec{m} \cdot \vec{n} = 0 - 3(-2 + \lambda) = 0,$$

解得 $\lambda = 2$.

故选 : C .

【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；坐标表示平面向量的垂直

30. 已知 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5)$, 则 $3\vec{a} - 2\vec{b} =$ () .

A. (2, 7)

B. (13, -7)

C. (2, -7)

D. (13, 13)

【答案】 B

【解析】 $\because \vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 5)$,

$$\therefore 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(3, 1) - 2(-2, 5) = (9, 3) - (-4, 10) = (13, -7),$$

故选 : B

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；平面向量线性运算综合（非坐标）

31. 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (x, -2)$, $\vec{c} = (0, 2)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$, 则实数 x 的值为 () .

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$

D. $-\frac{4}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\because \vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (x, -2)$, $\vec{c} = (0, 2)$ 且 $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$,

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \text{ 即 } (3, 1) \cdot (x, -2 - 2) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{3}.$$

故选A.

【标注】【知识点】坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算；数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）；利用数量积解决向量垂直问题（非坐标运算）

32. 已知向量 $\vec{a} = (t, 1)$ 与 $\vec{b} = (4, t)$ 共线且方向相同，则 $|\vec{a} + 3\vec{b}|^2 - |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = ()$.
- A. 235 B. 240 C. 245 D. 255

【答案】 C

【解析】 $\because \vec{a} // \vec{b}$,
 $\therefore \frac{t}{4} = \frac{1}{t}$, $\therefore t = \pm 2$,
又 $\because$ 方向相同 , $\therefore t = 2$.
 $\therefore \vec{a} + 3\vec{b} = (14, 7)$, $2\vec{a} - \vec{b} = (0, 0)$.
 $\therefore |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 - |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 245$.

【标注】【知识点】平面向量线性运算综合（非坐标）；坐标表示平面向量的垂直；坐标表示平面向量的共线；平面向量加、减、数乘的坐标运算

33. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等比数列，向量 $\vec{m} = (a_5, 27)$ ， $\vec{n} = (3, a_9)$ ，且 $\vec{m} // \vec{n}$ ，则 $\log_3 a_7 = ()$.
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】 C

【解析】 $\because \vec{m} // \vec{n}$, $\vec{m} = (a_5, 27)$, $\vec{n} = (3, a_9)$,
 $\therefore a_5 \cdot a_9 = 27 \times 3 = 81$
 $\Rightarrow a_7^2 = 81$,
 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 各项为正数 ,
 $\therefore a_7 = 9$,
 $\therefore \log_3 a_7 = \log_3 9 = 2$.

【标注】【知识点】等比数列角标和性质的应用

34. 已知 $P_1(2, -1)$ ， $P_2(0, 5)$ 且点 P 在 P_1P_2 的延长线上， $|\overrightarrow{P_1P}| = 2|\overrightarrow{PP_2}|$ ，则 P 点坐标为 $()$.
- A. $(-2, 11)$ B.

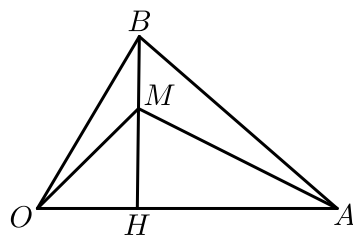
C. $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$

$\left(\frac{4}{3}, 3\right)$
D. $(2, -7)$

【答案】 A

【标注】 【知识点】 平面向量线性运算综合（非坐标）；平面向量中的三点共线问题；坐标表示平面向量的垂直；平面向量加、减、数乘的坐标运算

35. 如图所示：在 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ， $OA = 3$ ， $OB = 2$ ， $BH \perp OA$ 于 H ， M 为线段 BH 上的点，且 $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{5}{4}$ ，若 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BO} + y\overrightarrow{BA}$ ，则 $x + y$ 的值等于 _____ .



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 方法一：由已知条件知： $OH = 1$ ， $HA = 2$ ， $BH = \sqrt{3}$ ；

分别以 HA ， HB 所在直线为 x 轴， y 轴建立如图所示平面直角坐标系，则： $O(-1, 0)$ ，

$B(0, \sqrt{3})$ ， $A(2, 0)$ ，设 $M(0, m)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{MO} = (-1, -m), \overrightarrow{MA} = (2, -m).$$

$$\therefore \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -2 + m^2 = -\frac{5}{4},$$

$$\text{解得 } m = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

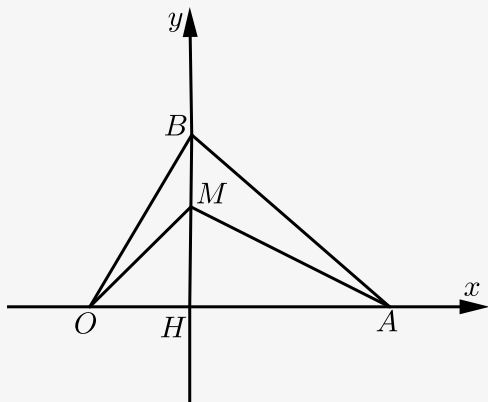
$$\overrightarrow{BM} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BO} = (-1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BA} = (2, -\sqrt{3}).$$

$$\therefore \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x(-1, -\sqrt{3}) + y(2, -\sqrt{3});$$

$$\therefore \begin{cases} 0 = -x + 2y \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}y \end{cases}, \text{解得 } x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{6},$$

$$\therefore x + y = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.



方法二：由已知条件知： $OH = 1$ ， $HA = 2$ ， $BH = \sqrt{3}$ ，

设 OA 中点为 D ，则 $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow MD^2 - \left(\frac{1}{2}OA\right)^2 = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow MD^2 = 1$ ，

$$\therefore MH = \sqrt{MD^2 - HD^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}，$$

$$\therefore \frac{BM}{BH} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y = \frac{1}{2}。$$

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算

36. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\vec{a} = (\cos x, \sin x)$ ， $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ ， $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ 。

(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，求 x 的值。

(2) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ ，求 $\cos x$ 的值。

【答案】(1) $\frac{5}{6}\pi$ 。

(2) 0。

【解析】(1) $\because \vec{a} \perp \vec{b}$ ，

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0，$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

$$= 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0，$$

$$\therefore x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})。$$

$$\therefore x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)，$$

$$\therefore x = \frac{5}{6}\pi。$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}。$$

$$\therefore 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}，\cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

$$\therefore x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)，$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} .$$

$$\therefore \cos x = 0 .$$

【标注】【知识点】利用向量数量积求夹角；坐标表示平面向量的垂直