

03导数解答2

1. 零点问题

1. 2019年天津河北区高三一模理科第20题14分 ★★★

已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 1$ 时 , 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值 .

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 , 求 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增 ,

$x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 .

(2) 当 $a \leq 0$ 时 , $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减 , 无极值 ,

当 $a > 0$ 时 , $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增 , $(a, +\infty)$ 上单调递减 .

$\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.

(3) $a > 1$.

【解析】 (1) $f(x) = \ln x^2 - x^2 + x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \\ &= \frac{(-x+1)(2x+1)}{x} , \end{aligned}$$

$\therefore x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增 ,

$x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 .

(2) $f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-2x^2 + (2a-1)x + a}{x}$,

$$f'(x) = \frac{(-x+a)(2x+1)}{x} , \quad x > 0 ,$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{2}$,

当 $a \leq 0$ 时 , $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减 , 无极值 ,

当 $a > 0$ 时 , $f'(x)$ 在 $(0, a)$ 单调递增 , $(a, +\infty)$ 上单调递减 .

$\therefore f(x)$ 有极大值 $= f(a) = a \ln a + a^2 - a$.

(3) 当 $a = 0$ 时 ,

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点 , 不符合题意 ,

当 $a \neq 0$ 时 ,

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2x + 2a - 1 = \frac{-(2x+1)(x-a)}{x} ,$$

$f'(x) = 0$ 时 , $x = -\frac{1}{2}$ 或 a ,

设 $g(x) = -(2x+1)(x-a)$,

$\because x \in (0, +\infty)$,
 $\therefore g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号 ,
 $g(x) > 0$ 时 , $f(x)$ 单调增 ,
 $g(x) < 0$ 时 , $f(x)$ 单调减 ,
 $\because f(x)$ 有两个而不同的两点 ,
 则 $f(x)$ 不可在 $(0, +\infty)$ 恒单调 ,
 即只有 $a > 0$ 时满足 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增 , $(a, +\infty)$ 上单调减 ,
 $f(x)$ 可能存在两个零点 , 且由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 取最大 , $f(a) > 0$,
 $f(a) = a \ln a - a^2 + (2a - 1)a > 0$.
 $\because a > 0$,
 $\therefore \ln a - a + 2a - 1 > 0$ 即 $\ln a > 1 - a$,
 得 : $a > 1$.

【标注】【知识点】求函数极值（含参二次型导函数）；求参数范围（含参二次型导函数）

2. 2019~2020学年3月重庆沙坪坝区重庆市第七中学高二下学期月考第19题 ★★

若函数 $f(x) = ax^3 - bx + 4$, 当 $x = 2$ 时 , 函数 $f(x)$ 有极值 $-\frac{4}{3}$.

- (1) 求函数的解析式 .
 (2) 求函数的极值 .
 (3) 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有三个零点 , 求实数 k 的取值范围 .

【答案】 (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$.

(2) $y_{\text{极大}} = f(-2) = \frac{28}{3}$, $y_{\text{极小}} = f(2) = -\frac{4}{3}$.

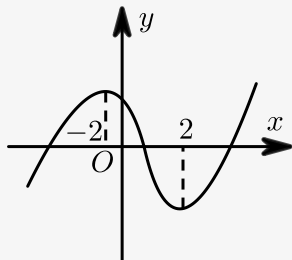
(3) $k \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

【解析】 (1) 由题 $f'(x) = 3ax^2 - b$,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} f'(2) = 12a - b = 0 \\ f(2) = 8a - 2b + 4 = -\frac{4}{3} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4 .$$

(2)



由 (1) 得 $f'(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$ 或 $x = -2$,

∴当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $\frac{28}{3}$,

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极大值 $-\frac{4}{3}$.

(3) 由(2)知当 $x < -2$ 时或 $x > 2$ 时, $f(x)$ 为增函数,

当 $-2 < x < 2$ 时, $f(x)$ 为减函数,

要使 $f(x) = k$ 有三个零点, 则 $f(x)_{\text{极小值}} < k < f(x)_{\text{极大值}}$,

∴ $-\frac{4}{3} < k < \frac{28}{3}$.

【标注】【知识点】函数零点的概念; 已知零点或根情况求参数范围; 导数与最值; 求解函数极值; 已知极值情况求函数解析式

3. 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第20题16分 ★★★

已知函数 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < ae$.

【答案】(1) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;

当 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;

当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 因为 $f(x) = \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{a} - e^x$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln \frac{1}{a}$,

当 $x < \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \ln \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

故函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$; 减区间为 $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$.

当 $\ln \frac{1}{a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 则

$f(x)_{\max} = f(2) = \frac{2}{a} - e^2$;

当 $1 < \ln \frac{1}{a} < 2$ 时, 即 $\frac{1}{e^2} < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $\left[1, \ln \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在区间

$\left(\ln \frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$;

当 $\ln \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 则

$f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{a} - e$.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 由 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} > 0$, 可得 $\ln \frac{1}{a} > 1$,

则 $\frac{1}{a} > e$, 此时 $f(1) = \frac{1}{a} - e > 0$, 由此可得 $x_1 < 1 < \ln \frac{1}{a} < x_2$,

故 $x_2 - x_1 > \ln \frac{1}{a} - 1$, 即 $x_1 - x_2 < 1 - \ln \frac{1}{a}$,

又因为 $f(x_1) = \frac{x_1}{a} - e^{x_1} = 0$, $f(x_2) = \frac{x_2}{a} - e^{x_2} = 0$,

$$\text{所以 } \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2} < e^{1 - \ln \frac{1}{a}} = e^{\ln ae} = ae,$$

$$\text{所以 } \frac{x_1}{x_2} < ae.$$

【标注】【知识点】函数零点存在定理；利用导数求函数的最值；双变量问题

4. 2015年天津河北区高三二模理科第20题14分 ★★★★★

设函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x - a \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若函数有两个零点, 求满足条件的最小正整数 a 的值.

(3) 若方程 $f(x) = c$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$.

【答案】(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间.

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

(2) 3

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2x - (a-2) - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - (a-2)x - a}{x} = \frac{(2x-a)(x+1)}{x}.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{a}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{a}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

(2) 由(1)可得, 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 则 $a > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值 $f\left(\frac{a}{2}\right) < 0$, 即

$$-a^2 + 4a - 4a \ln \frac{a}{2} < 0.$$

$$\because a > 0, \therefore a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4 > 0.$$

令 $h(a) = a + 4 \ln \frac{a}{2} - 4$, 可知 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(2) = -2$,

所以存在零点 $h(a_0) = 0$, $a_0 \in (2, 3)$,

当 $a > a_0$ 时, $h(a) > 0$; 当 $0 < a < a_0$ 时, $h(a) < 0$.

所以满足条件的最小正整数 $a = 3$.

又当 $a = 3$ 时, $f(3) = 3(2 - \ln 3) > 0$, $f(1) = 0$, $\therefore a = 3$ 时, $f(x)$ 由两个零点.

综上所述, 满足条件的最小正整数 a 的值为 3.

(3) $\because x_1, x_2$ 是方程 $f(x) = c$ 得两个不等实数根, 由(1)可知: $a > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < x_2$. 则 $x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 = c$, $x_2^2 - (a-2)x_2 - a \ln x_2 = c$.

$$\text{两式相减得 } x_1^2 - (a-2)x_1 - a \ln x_1 - x_2^2 + (a-2)x_2 + a \ln x_2 = 0,$$

化为 $a = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$.

$\because f'(\frac{a}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$ 时 , $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$ 时 , $f'(x) > 0$.

故只要证明 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{a}{2}$ 即可 ,

即证明 $x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 + \ln x_1 - x_2 - \ln x_2}$, 即证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2}$,

设 $t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1)$, 令 $g(t) = \ln t - \frac{2t-2}{t+1}$, 则 $g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$.

$\because 1 > t > 0$, $\therefore g'(t) > 0$.

$\therefore g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数 , 又在 $t = 1$ 处连续且 $g(1) = 0$,

$\therefore$ 当 $t \in (0, 1)$ 时 , $g(t) < 0$ 总成立 . 故命题得证 .

【标注】【知识点】双变量问题；求参数范围（含参二次型导函数）

2. 隐零点问题

5. 2017年天津河西高三二模理科第20题14分 ★★★★★

设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - kx$.

(1) 若 $k = 2$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) $f(x)$ 无零点 , 求实数 k 的取值范围 .

(3) 若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证 : $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

【答案】 (1) $x + y + 1 = 0$.

(2) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1-kx}{x}$,

当 $k = 2$ 时 , $f'(1) = 1 - 2 = -1$, 则切线方程为 $y - (-2) = -(x - 1)$, 即 $x + y + 1 = 0$.

(2) ① 若 $k < 0$ 时 , 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数 ,

$\because f(1) = -k > 0$, $f(e^k) = k - ke^k = k(1 - e^k) < 0$,

$\therefore f(1) \cdot f(e^k) < 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 有唯一零点 ;

① 若 $k = 0$ $f(x) = \ln x$ 有唯一零点 $x = 1$;

② 若 $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{k}$,

在区间 $(0, \frac{1}{k})$ 上 , $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 是增函数 ;

在区间 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上 , $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 是减函数 ;

故在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1$,
 由于 $f(x)$ 无零点, 须使 $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k - 1 < 0$, 解得 $k > \frac{1}{e}$,
 故所求实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

(3) 设 $f(x)$ 的两个相异零点为 x_1, x_2 , 设 $x_1 > x_2 > 0$,
 $\because f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, \therefore \ln x_1 - kx_1 = 0, \ln x_2 - kx_2 = 0$,
 $\therefore \ln x_1 - \ln x_2 = k(x_1 - x_2), \ln x_1 + \ln x_2 = k(x_1 + x_2)$,
 $\because x_1 x_2 > e^2$, 故 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 故 $k(x_1 + x_2) > 2$,
 即 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$,
 设 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 上式转化为 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$,
 设 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$,
 $\therefore g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$,
 $\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore g(t) > g(1) = 0, \therefore \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$,
 $\therefore \ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

【标注】【思想】分类讨论思想

【知识点】双变量问题; 通过构造函数证明不等式; 求参数范围(含参一次型导函数)

6. 2020~2021学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考(统练6)第20题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$) 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e-1 = 0$.

(1) 求 a, b .

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 \leq 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【解析】(1) 解: 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x + ey + e-1 = 0$, 可得

$$f(-1) = 0, \text{ 即 } f(-1) = (-1+b)(e^{-1} - a) = 0,$$

又函数 $f(x) = (x+b)(e^x - a)$, ($b > 0$),

可得导数为 $f'(x) = (x+b+1)e^x - a$, 所以 $f'(-1) = \frac{b}{e} - a = -1 + \frac{1}{e}$,

若 $a = \frac{1}{e}$, 则 $b = 2 - e < 0$, 与 $b > 0$ 矛盾,

故 $a = b = 1$.

(2) 证明: 由(1)可知 $f(x) = (x+1)(e^x - 1)$, $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$,

设 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 处的切线方程为 $h(x) = k(x+1)$,

易得 $k = f'(-1) = \frac{1}{e} - 1$, 则 $h(x) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1)$,

令 $F(x) = f(x) - h(x)$,

即 $F(x) = (x+1)(e^x - 1) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x+1)$, $F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}$,

当 $x \leq -2$ 时 , $F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e} \leq -\frac{1}{e} < 0$,

当 $x > -2$ 时 ,

设 $G(x) = F'(x) = (x+2)e^x - \frac{1}{e}$, $G'(x) = (x+3)e^x > 0$,

故函数 $F'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增 , 又 $F'(-1) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时 , $F'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时 , $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递减 , 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增 ,

故 $F(x) \geq F(-1) = 0$,

$f(x_1) \geq h(x_1)$,

设 $h(x) = m$ 的根为 x_1' , 则 $x_1' = -1 + \frac{me}{1-e}$,

又函数 $h(x)$ 单调递减 , 故 $h(x_1') = f(x_1) \geq h(x_1)$, 故 $x_1' \leq x_1$,

设 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = t(x)$, 易得 $t(x) = x$,

令 $T(x) = f(x) - t(x) = (x+1)(e^x - 1) - x$, $T'(x) = (x+2)e^x - 2$,

当 $x \leq -2$ 时 , $T'(x) = (x+2)e^x - 2 \leq -2 < 0$,

当 $x > -2$ 时 ,

设 $H(x) = T'(x) = (x+2)e^x - 2$, $H'(x) = (x+3)e^x > 0$,

故函数 $T'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增 , 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 , $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , $T'(x) > 0$,

所以函数 $T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减 , 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ,

$T(x) \geq T(0) = 0$,

$f(x_2) \geq t(x_2)$,

设 $t(x) = m$ 的根为 x_2' , 则 $x_2' = m$,

又函数 $t(x)$ 单调递增 , 故 $t(x_2') = f(x_2) \geq t(x_2)$, 故 $x_2' \geq x_2$,

又 $x_1' \leq x_1$,

则 $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = m - \left(-1 + \frac{me}{1-e}\right) = 1 + \frac{m(1-2e)}{1-e}$.

【标注】【知识点】已知切线方程求参数；双变量问题

7. 2019年高考真题天津卷文科第20题14分 ★★★★★

设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 单调性 .

(2) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$.

① 证明： $f(x)$ 恰有两个零点 .

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明: $3x_0 - x_1 > 2$.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(2) ① 证明见解析.

② 证明见解析.

【解析】(1) 由已知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{且 } f'(x) = \frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1 - ax^2e^x}{x},$$

因此当 $a \leq 0$ 时, $1 - ax^2e^x > 0$,

从而 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

(2) ① 由 (1) 知 $f'(x) = \frac{1 - ax^2e^x}{x}$.

$$\text{令 } g(x) = 1 - ax^2e^x, \text{ 由 } 0 < a < \frac{1}{e},$$

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

$$\text{又 } g(1) = 1 - ae > 0,$$

$$\text{且 } g\left(\ln \frac{1}{a}\right) = 1 - a\left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{a} = 1 - \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2 < 0.$$

故 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

从而 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解,

不妨设为 x_0 , 则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a}$.

$$\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增.

$$\text{当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减, 因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x + 1,$$

$$\text{则当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

$$\text{从而当 } x > 1 \text{ 时, } h(x) < h(1) = 0,$$

$$\text{所以 } \ln x < x - 1.$$

从而

$$f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln \ln \frac{1}{a} - a\left(\ln \frac{1}{a} - 1\right)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1 = h\left(\ln \frac{1}{a}\right) < 0,$$

又因为 $f(x_0) > f(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内有唯一零点.

又 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1,

从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点.

$$\text{② 由题意, } \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} ax_0^2e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases},$$

$$\text{从而 } \ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}, \text{ 即 } e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1}.$$

因为当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$,

$$\text{又 } x_1 > x_0 > 1, \text{ 故 } e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2,$$

$$\text{两边取对数, 得 } \ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2,$$

$$\text{于是 } x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1),$$

$$\text{整理得 } 3x_0 - x_1 > 2.$$

【标注】【知识点】求函数零点(含参指对型导函数);利用导数解决不等式恒成立问题;双变量问题

8. 2014年天津南开区高三一模理科第20题14分 ★★★★★

设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 的直线的斜率为 k , 问: 是否存在 a , 使得 $k = 2 - a$? 若存在, 求出 a 的值, 若不存在, 请说明理由.

(3) 证明: $\sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$.

【答案】 (1) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 不存在; 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \geq 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增}.$$

(2) 由 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2 , 知 $a > 2$.

$$\because f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} - a(\ln x_1 - \ln x_2),$$

$$\therefore k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 + \frac{1}{x_1 x_2} - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{又 } f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2},$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 有两个极值点 } x_1 \text{ 和 } x_2, \text{ 可得 } x_1 x_2 = 1. \text{ 于是 } k = 2 - a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

$$\text{若存在 } a, \text{ 使得 } k = 2 - a, \text{ 则 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = 1, \text{ 即 } \ln x_1 - \ln x_2 = x_1 - x_2,$$

$$\text{亦即 } x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 = 0^{(*)},$$

$$\text{再由(1)知, 函数 } h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增},$$

$$\text{而 } x_2 > 1,$$

$$\therefore x_2 - \frac{1}{x_2} - 2 \ln x_2 > 1 - 1 - 2 \ln 1 = 0, \text{ 这与 } (*) \text{ 式矛盾},$$

故不存在 a , 使得 $k = 2 - a$.

$$(3) \because \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} = \ln \frac{2}{n(n+1)},$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} &> \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow \ln \frac{2}{n(n+1)} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow \ln \frac{n(n+1)}{2} \\ &< \frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \end{aligned}$$

$$\text{令 } x = \frac{n(n+1)}{2} > 1, \text{ 则 } \ln \frac{n(n+1)}{2} < \frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0,$$

由上知 $x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0$ 成立,

$$\therefore \sum_{k=2}^n \ln \frac{k-1}{k+1} > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}.$$

【标注】【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】直接求函数的单调性（不含参）；已知极值情况求参数范围；通过构造函数证明不等式；双变量问题