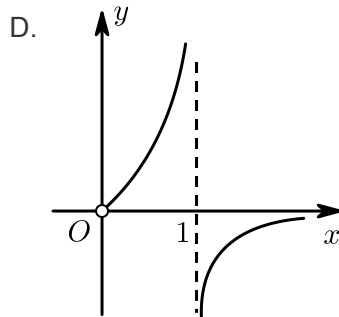
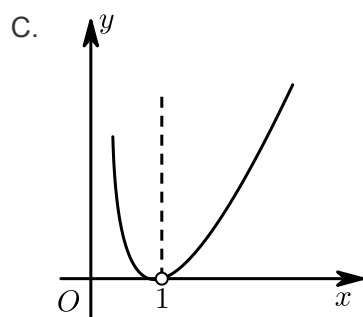
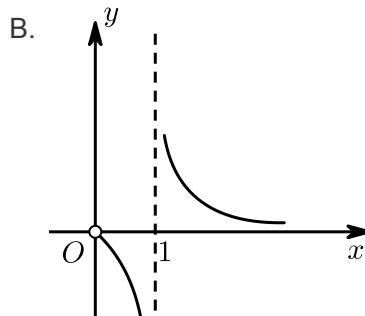
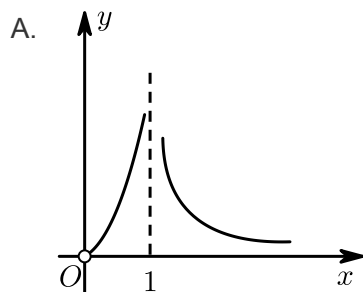


01导数的应用练习题

1. 2019~2020学年重庆南岸区重庆第二外国语学校高二下学期期末第8题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ ，则 $y = f(x)$ 的图象大致为 () .



【答案】A

【解析】令 $u(x) = x \ln x - 1$, $x > 0$,

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

令 $u'(x) > 0$, 解得 $x > 1$,

令 $u'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$,

所以 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数,

$u(x) \geq u(1) = 0$ 等号成立当且仅当 $x = 1$,

$f(u) = \frac{1}{u}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

$f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 是 $f(u) = \frac{1}{u}$ 和 $u(x) = x - \ln x - 1$ 的复合函数,

所以 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数, 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数, 只有 A 选项符合.

故选 A.

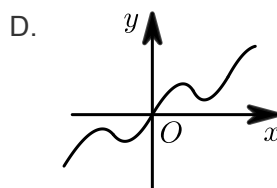
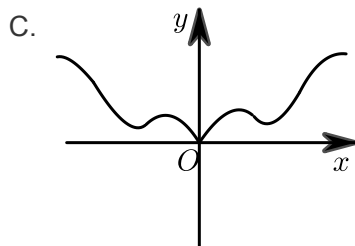
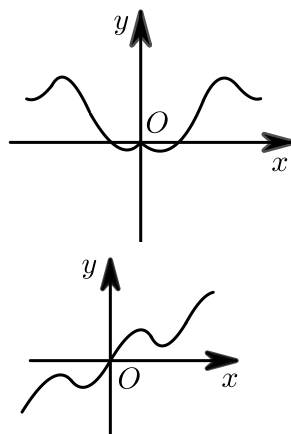
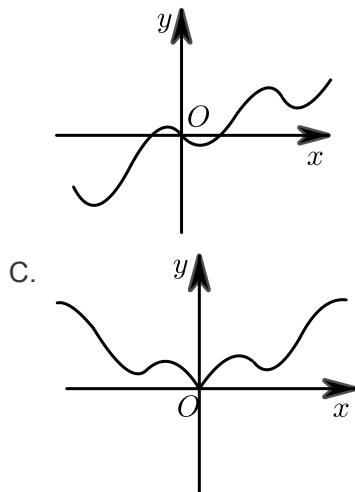
【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象；图象法

2. 2020~2021学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考(统练6)第3题4分 ★★★

已知 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(x)$ 的图象是 () .

A.

B.



【答案】 A

【解析】 B、C . 由 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{4}x^2 + \cos x$,
 所以 $f'(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$, $f'(-x) = -\frac{1}{2}x - \sin(-x) = -\frac{1}{2}x + \sin x = -f'(x)$,
 所以它是一个奇函数, 其图象关于原点对称, 故 B、C 错误;
 D . 又 $f''(x) = \frac{1}{2} - \cos x$, 当 $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $\cos x > \frac{1}{2}$,
 所以 $f''(x) < 0$, 故函数 $y = f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 故 D 错误 .
 故选 A .

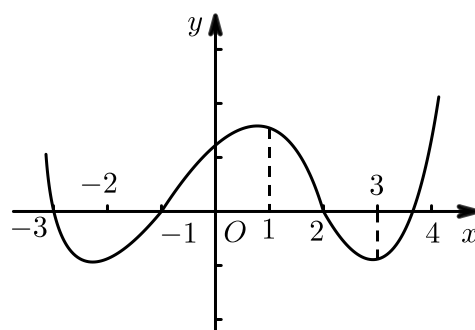
【标注】 【知识点】 三角函数类型; 已知原函数确认导数图函数

3. 2019~2020学年4月天津和平区天津市双菱中学高二下学期月考第11题5分 ★★

如图是 $y = f(x)$ 的导函数的图象, 现有四种说法:

- ① $f(x)$ 在 $(-3, 1)$ 上是增函数;
- ② $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点;
- ③ $f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上是减函数, 在 $(-1, 2)$ 上是增函数;
- ④ $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点;

以上正确的序号为 _____ .



【答案】 ②③

【解析】当 $x \in (-3, -1)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-3, -1)$ 上为减函数, 在 $(-1, 1)$ 上为增函数, 故①不正确;

$x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点,

当 $x \in (2, 4)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数;

当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数;

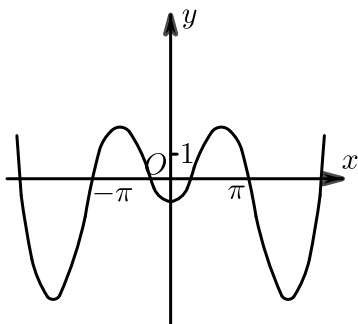
$x = 2$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 故②③正确, ④错误.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 求解函数极值

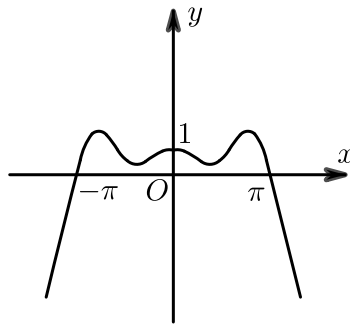
4. 2017~2018学年湖南长沙岳麓区湖南师范大学附属中学高三上学期开学考试文科第7题5分 ★★

函数 $y = x \sin x + \cos x$ 的图象大致为 ().

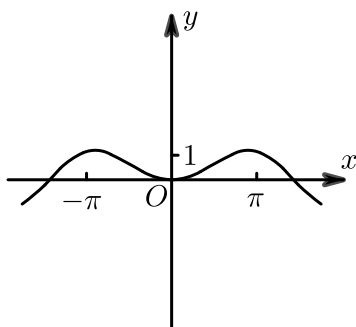
A.



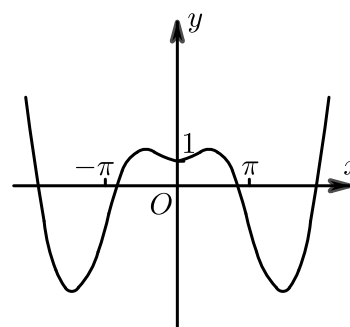
B.



C.



D.



【答案】D

【解析】由题意得, 函数 $y = x \sin x + \cos x$ 是偶函数, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 且

$y' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$, 显然在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $y' > 0$, 所以函数单调递增, 故选 D.

【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象

5. 2018~2019学年11月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考理科第12题5分 ★★

已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值为 ____.

【答案】 $5 + 2\sqrt{6}$

【解析】 $y' = \frac{1}{x+b}$,

由切线方程 $y = x - a$ 可得 $k = 1$,

切点横坐标为 $1 - b$, 切点 $(1 - b, 0)$,

代入 $y = x - a$, 得 $a + b = 1$,

$\because a, b$ 为正实数 ,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2}{a} + \frac{3}{b} &= (a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right) \\ &= 2 + 3 + \frac{2b}{a} + \frac{3a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{6} ,\end{aligned}$$

当且仅当 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}b$, 即 $a = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$, $b = 3 - \sqrt{6}$,

取得最小值 $5 + 2\sqrt{6}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；导数的几何意义；已知切线方程求参数

6. 2019~2020学年4月天津北辰区天津市第四十七中学高三下学期月考第7题5分 ★★★

已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - a + 2$ 与曲线 $y = e^{x+b} - 1$ 相切, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 () .

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

【答案】 B

【解析】 由 $y = x - a + 2$ 得 $y' = 1$;

由 $y = e^{x+b} - 1$ 得 $y' = y = e^{x+b}$;

因为直线 $y = x - a + 2$ 与曲线 $y = e^{x+b} - 1$ 相切 ,

令 $e^{x+b} = 1$, 则可得 $x = -b$, 代入 $y = e^{x+b} - 1$ 得 $y = 0$,

所以切点为 $(-b, 0)$, 则 $-b - a + 2 = 0$,

所有 $a + b = 2$,

$$\begin{aligned}\text{故 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &= 1 + \frac{b}{2a} + \frac{a}{2b} \\ &\geq 1 + 2\sqrt{\frac{a}{2b} \cdot \frac{b}{2a}} \\ &= 2 ,\end{aligned}$$

当且仅当 $a = b = 1$ 时等号成立 , 此时取得最小值 2 .

故选 : B .

【标注】【知识点】导数的几何意义的实际应用；导数的几何意义

7. 2017~2018学年9月广东深圳龙岗区深圳市龙岗区龙城高级中学高三上学期月考理科第14题5分 ★★

设曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上点 P 处的切线垂直, 则 P 的坐标为 _____ .

【答案】 (1,1)

【解析】 设 $f(x) = e^x$,

$$f'(x) = e^x,$$

$$\therefore f'(0) = 1,$$

$\therefore f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处切线方程为:

$$y - 1 = 1 \times (x - 0),$$

$$\text{即 } y = x + 1,$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{1}{x} (x > 0),$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$g'(x_P) = -1, \quad x_P = 1,$$

$$\therefore P(1,1).$$

【标注】 【知识点】 求在某点处的切线方程；导数的几何意义

8. 2019~2020学年3月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高二下学期月考第2题8分 ★★

已知函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $x - 2y + 1 = 0$, 则 $f(2) + f'(2)$ 的值是 () .

A. 2

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

【答案】 A

【解析】 函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $x - 2y + 1 = 0$,

$$\text{可得 } f(2) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}, \quad f'(2) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即有 } f(2) + f'(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用

9. 2020~2021学年天津和平区天津市耀华中学高三上学期开学考试第14题5分 ★★

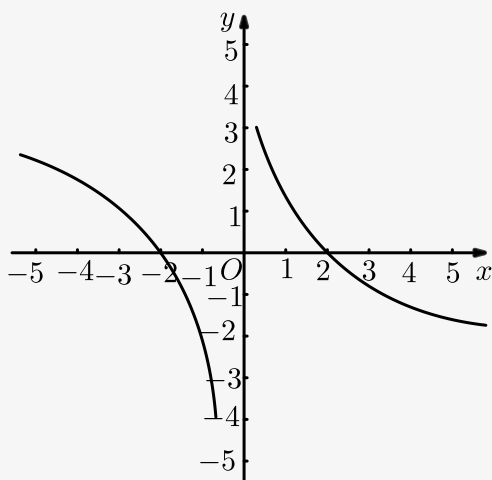
已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(2) = 0$, $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0 (x > 0)$, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 _____ .

【答案】 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【解析】 当 $x > 0$ 时, 由 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$,

可得函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(2) = 0$,
 所以 $g(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 且 $g(2) = 0$,
 则 $g(x)$ 的大致图象如图所示:



所以不等式 $xf(x) < 0$ 的解集是 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

10. 2020~2021学年天津河东区高三上学期期中第8题5分 ★★

已知函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上可导且满足 $xf'(x) - f(x) > 0$, 则下列一定成立的为 ().

- A. $ef(\pi) > \pi f(e)$ B. $f(\pi) < f(e)$ C. $\frac{f(\pi)}{\pi} < \frac{f(e)}{e}$ D. $f(\pi) > f(e)$

【答案】 A

【解析】 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$,
 $\therefore g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ 恒成立,
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore g(\pi) > g(e)$,
 即 $\frac{f(\pi)}{\pi} > \frac{f(e)}{e}$,
 即 $ef(\pi) > \pi f(e)$.
 故选 A.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间; 利用导数求单调性证不等式

11. 2019~2020学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考第8题5分 ★★★

已知函数 $f(x)$ 对定义域 $\mathbf{R}$ 内的任意 x 都有 $f(x) = f(4-x)$, 且当 $x \neq 2$ 时其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) > 2f'(x)$, 若 $2 < a < 4$ 则 ().

- A. $f(2^a) < f(3) < f(\log_2 a)$ B. $f(3) < f(\log_2 a) < f(2^a)$
 C. $f(\log_2 a) < f(3) < f(2^a)$ D. $f(\log_2 a) < f(2^a) < f(3)$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 对定义域 $\mathbf{R}$ 内的任意 x 都有 $f(x) = f(4-x)$,

$\therefore f(x)$ 关于直线 $x = 2$ 对称,

又当 $x \neq 2$ 时其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) > 2f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-2) > 0$,

$\therefore$ 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

同理可得, 当 $x < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 单调递减,

$\because 2 < a < 4$,

$\therefore 1 < \log_2 a < 2$,

$\therefore 2 < 4 - \log_2 a < 3$,

又 $4 < 2^a < 16$,

$f(\log_2 a) = f(4 - \log_2 a)$,

$f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上的单调递增,

$\therefore f(\log_2 a) < f(3) < f(2^a)$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 导数与单调性; 用单调性比较大小; 对称性

12. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高二下学期期中第7题5分 ★★★

已知 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 若当 $x > 0$ 时,

$f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} < 0$, 则不等式 $(x-1)f(x) < 0$ 的解集是 ().

A. $(1, +\infty)$

B. $(0, 1)$

C. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】 A

【解析】 构造函数 $g(x) = f(x) \ln x$,

则 $g'(x) = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x}$,

由题意可知, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$,

故在 $(0, +\infty)$ 上, $g(x)$ 单调递减, 且当 $x = 1$ 时, $g(1) = f(1) \cdot \ln 1 = 0$,

$\therefore$ 在 $(0, 1)$ 上, $\ln x < 0$, $g(x) > 0$,

则 $f(x) < 0$,

在 $(1, +\infty)$ 上, $\ln x > 0$, $g(x) < 0$,

则 $f(x) < 0$,

$\therefore$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$, 又因为 $f(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时,

则 $-x > 0$, $f(x) = f(-x) < 0$,

故在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上, $f(x) < 0$,

则不等式 $(x-1)f(x) < 0$ 等价于 $(x-1) > 0$, 即 $x > 1$,

故选 A.

【标注】【知识点】指对型导数构造；利用函数单调性解不等式