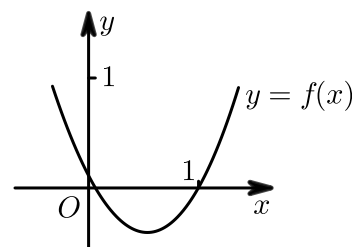


01导数的应用

1. 图像题

1. 2019~2020学年5月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高二下学期月考第6题5分 ★★★

二次函数 $f(x) = x^2 - bx + a$ 的部分图像如图所示，则函数 $g(x) = e^x + f'(x)$ 的零点所在的区间是 () .



A. $(-1,0)$

B. $(0,1)$

C. $(1,2)$

D. $(2,3)$

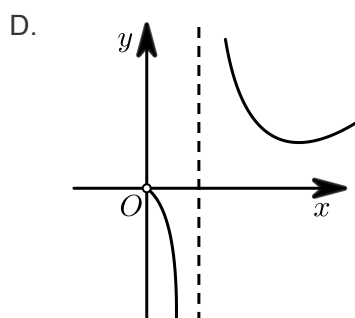
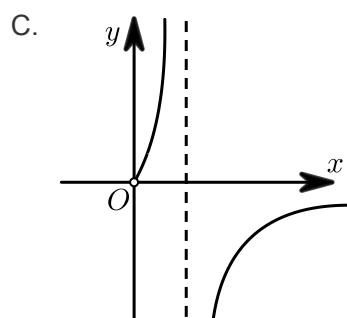
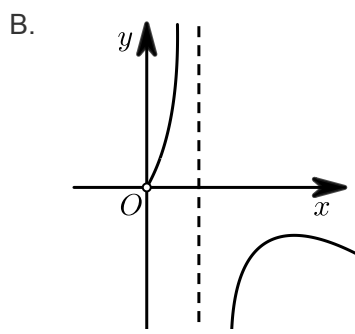
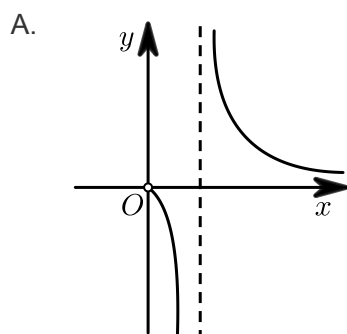
【答案】 B

【解析】 由图像可知， $0 < f(0) = a < 1$ ①， $f(1) = 0$ ，即 $1 - b + a = 0$ ②，由①②可得 $1 < b < 2$ ， $g(x) = e^x + 2x - b$ ，且 $g(0) = 1 - b < 0$ ， $g(1) = e + 2 - b > 0$ ，又 $g(x)$ 的图像连续不断，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上必存零点，故选B.

【标注】 【知识点】 导数与最值；导数与单调性；利用公式和四则运算法则求导

2. 2020~2021学年10月陕西西安雁塔区西安高新第一中学高二上学期月考理科第3题4分 ★★

函数 $y = \frac{2x}{\ln x}$ 的图象大致为 () .



【答案】 D

【解析】 方法一：当 $0 < x < 1$ 时， $\ln x < 0$ ，所以 $y < 0$ ，排除 B，C；

$$\text{函数的导数 } f'(x) = \frac{2\ln x - 2x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2\ln x - 2}{(\ln x)^2}.$$

由 $f'(x) > 0$ ，得 $\ln x > 1$ ，即 $x > e$ ，此时函数单调递增；

由 $f'(x) < 0$ ，得 $\ln x < 1$ 且 $x \neq 1$ ，即 $0 < x < 1$ 或 $1 < x < e$ ，此时函数单调递减。

故选 D。

方法二：利用特殊点法：当 $x = \frac{1}{e}$ 时， $y = -\frac{2}{e} < 0$ ，排除 B，C；

当 $x_1 = e$ ， $x_2 = e^2$ 时， $y_1 = 2e$ ， $y_2 = e^2$ 。

易知 $y_1 < y_2$ ，排除 A。

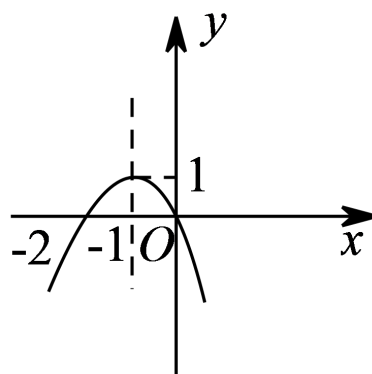
故选 D。

【标注】 【知识点】 利用导数确定函数的图象

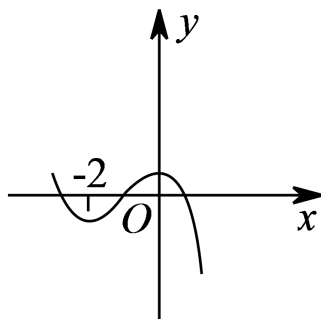
【素养】 数学运算

3. 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高二下学期期末第5题5分 ★★

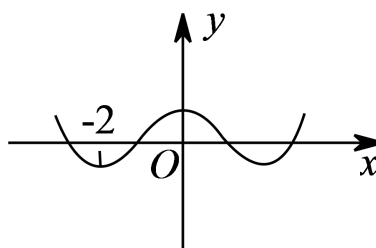
已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，那么 $f(x)$ 的图象最有可能的是（ ）。



A.

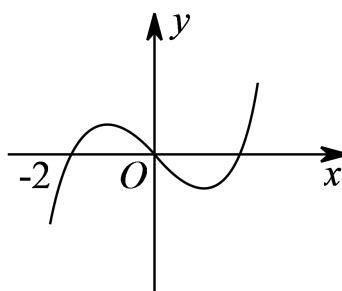
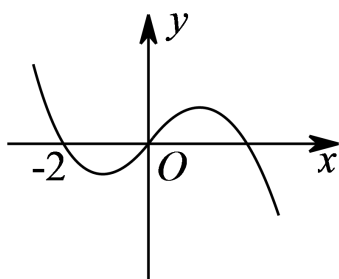


B.



C.

D.



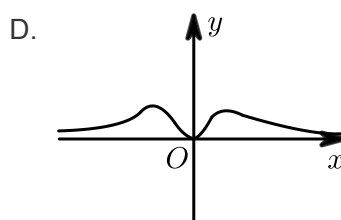
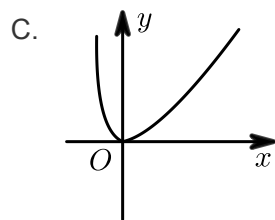
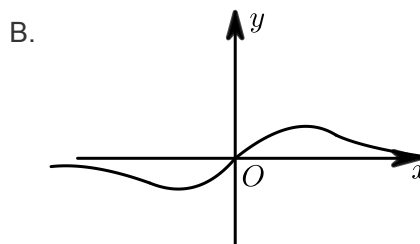
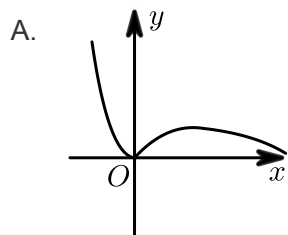
【答案】 A

【解析】 当 $x < -2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,
 当 $-2 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,
 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,
 选 A.

【标注】 【知识点】 利用导数确定函数的图象

4. 2020~2021 学年3月河南洛阳洛龙区洛阳市第一高级中学高二下学期月考理科第2题5分 ★★

函数 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象大致是 ().



【答案】 A

【解析】 由 $y = \frac{x^2}{e^x}$ 得 $y' = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x}$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数单调减,

当 $x \in (0, 2)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增,

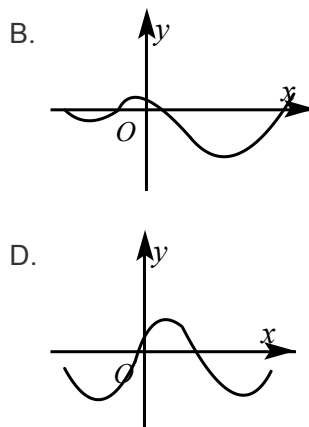
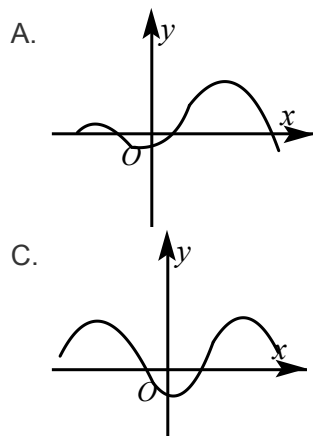
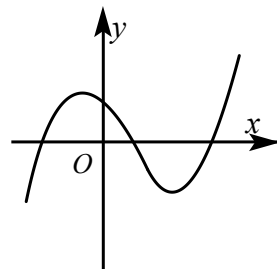
只有 A 项图象符合条件.

故选 A.

【标注】 【知识点】 利用导数确定函数的图象; 函数图象的识别问题; 图象法

5. 2018~2019学年广东深圳宝安区深圳市西乡中学高二下学期期中理科第9题5分 ★★

函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 () .



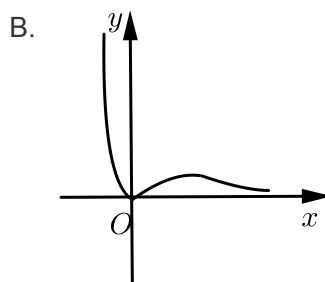
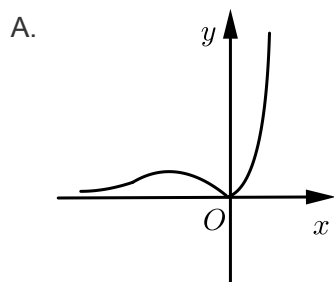
【答案】 D

【解析】不妨设导函数 $y = f'(x)$ 的零点依次为 x_1, x_2, x_3 ，其中 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ，
由导函数图象可知， $y = f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上为减函数，在 (x_1, x_2) 上为增函数，在 (x_2, x_3) 上为减函数，在 $(x_3, +\infty)$ 上为增函数，
从而排除 A，C. $y = f(x)$ 在 $x = x_1, x = x_3$ 处取到极小值，在 $x = x_2$ 处取到极大值，
又 $x_2 > 0$ ，排除 B，故选 D.

【标注】 【知识点】 利用导数确定函数的图象

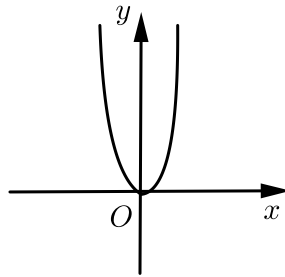
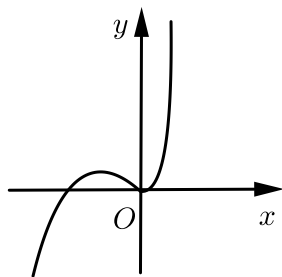
6. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高二下学期期末第11题4分 ★★

函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的大致图象为 () .



C.

D.



【答案】 A

【解析】 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的导数 $f'(x) = x e^x + \frac{x^2 e^x}{2} = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$,

故排除选项 B, D,

又 $x^2 \geq 0$, $e^x > 0$,

$\therefore f(x) = \frac{x^2 e^x}{2} \geq 0$, 故排除选项 C.

故选 A.

【标注】 【知识点】 利用导数确定函数的图象

2. 切线问题

7. 2020~2021学年10月天津河西区天津市新华中学高三上学期月考第13题4分 ★★★

直线 $y = 3x + b$ 与函数 $f(x) = e^x + x$ 的图象相切, 则实数 $b =$ _____.

【答案】 $2 - 2 \ln 2$

【解析】 设切点为 (m, n) ,

则斜率 $k = f'(m)$,

即 $3 = e^m + 1$,

解得 $m = \ln 2$,

$n = f(m) = 2 + \ln 2$.

将 $(\ln 2, 2 + \ln 2)$ 代入直线 $y = 3x + b$,

得 $2 + \ln 2 = 3 \ln 2 + b$,

解得 $b = 2 - 2 \ln 2$.

【标注】 【知识点】 已知斜率求切线方程

8. 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第12题5分 ★★

曲线 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 _____.

【答案】 $2x + y - 3 = 0$

【解析】 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$,

故 $f(1) = 1$, $f'(1) = -2$,

所以切线为: $y - 1 = -2(x - 1)$,

即 $2x + y - 3 = 0$.

故答案为: $2x + y - 3 = 0$.

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程

9. 2019~2020学年4月天津南开区天津市崇化中学高二下学期月考第5题5分 ★★

已知函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 相切于点 $(-2, f(-2))$, 则 $f(-2) + f'(-2) = ()$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 已知函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 相切于点 $(-2, f(-2))$,

可知: $f'(-2) = -\frac{1}{2}$,

把 $x = -2$ 代入 $x + 2y - 1 = 0$ 得:

$y = \frac{3}{2}$, 即 $f(-2) = \frac{3}{2}$,

$\therefore f(-2) + f'(-2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

故选 B.

【标注】【知识点】导数的几何意义; 导数的几何意义的实际应用

10. 2018~2019学年安徽六安高二下学期期末文科 ★★★

已知 $a \in \mathbf{R}$. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为()

A. $[0, 1]$

B. $[0, 2]$

C. $[0, e]$

D. $[1, e]$

【答案】 C

【解析】 解: 当 $x = 1$ 时, $f(1) = 1 - 2a + 2a = 1 > 0$ 恒成立;

当 $x < 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 2a \geq 0 \Leftrightarrow 2a \geq \frac{x^2}{x-1}$ 恒成立,

令 $g(x) = \frac{x^2}{x-1} = -\frac{x^2}{1-x} = -\frac{(1-x-1)^2}{1-x}$
 $= -\frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{1-x}$

$$= -\left(1-x+\frac{1}{1-x}-2\right) \leq -\left(2\sqrt{(1-x) \cdot \frac{1}{1-x}}-2\right)$$

$$= 0, \text{ 当且仅当 } 1-x = \frac{1}{1-x}, \text{ 即 } x=0 \text{ 时等号成立,}$$

$$\therefore 2a \geq g(x)_{\max} = 0,$$

$$\therefore a \geq 0.$$

当 $x > 1$ 时, $f(x) = x - a \ln x \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{x}{\ln x}$ 恒成立,

$$\text{令 } h(x) = \frac{x}{\ln x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

当 $x > e$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $1 < x < e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = e$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(e) = e$,

$$\therefore a \leq h(x)_{\min} = e,$$

综上, a 的取值范围是 $[0, e]$.

故选 C.

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

11. 2020年天津河北区高三一模第9题5分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax - a$ 恰有 1 个实根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$

B. $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

C. $[-1, 1]$

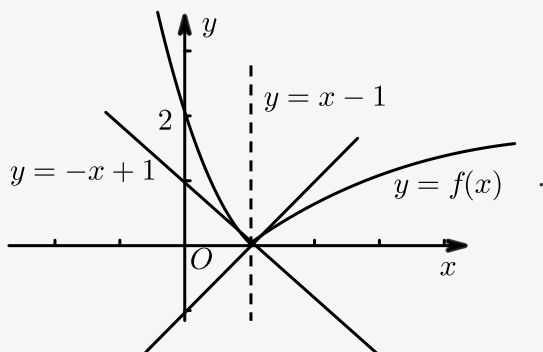
D. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 由 $y = x^2 - 3x + 2$ 得 $y' = 2x - 3$, $y'|_{x=1} = 2 - 3 = -1$,

由 $y = \ln x$ 得 $y' = \frac{1}{x}$, $y'|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$,

作出函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y = x - 1$, 直线 $y = -x + 1$ 的图象, 又直线 $y = a(x - 1)$ 恒过 $(1, 0)$ 点, 知 $a \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = ax - a$ 恰有 1 个实根,



故选 A.

【标注】【素养】数学运算；数学抽象

【知识点】求函数零点（含参一次型导函数）；零点、交点、根的等价转化；已知零点情况求参数的取值范围

【思想】数形结合思想

12. 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高二下学期期中第13题 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若方程 $f(x) - ax = 0$ 恰有两个不同的实根，则实数 a 的取值范围

是 () .

A. $(0, \frac{1}{3})$

B. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{e})$

C. $(\frac{1}{e}, \frac{4}{3}]$

D. $(-\infty, 0] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

【答案】B

【解析】∵方程 $f(x) - ax = 0$ 恰有两个不同实数根，

∴ $y = f(x)$ 与 $y = ax$ 的图象有 2 个交点，

∴当 $x > 1$ 时， $f(x) = \ln x$ ， $f'(x) = \frac{1}{x}$ ，

设直线 l_1 与 $f(x) = \ln x (x > 1)$ 的图象相切，

切点为 (x_0, y_0) ， $k = \frac{1}{x_0}$ ，

∴切线方程为 $y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ，而切线过原点，

∴ $y_0 = 1$ ， $x_0 = e$ ， $k = \frac{1}{e}$ ，

∴直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{e}$ ，

又∵直线 l_2 与 $y = \frac{1}{3}x + 1$ 平行，

∴直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{3}$ ，

∴实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, \frac{1}{e})$ 。

故选：B。

【标注】【素养】逻辑推理；直观想象；数学运算

【知识点】分段函数；求参数范围（含参指对型导函数）

13. 2017~2018学年江西南昌东湖区南昌市第二中学高二上学期期末理科第10题5分 ★★

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$ ，若过点 $M(3, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线，则实数 t 的取值范围是 () .

A. $(-9, 18)$

B. $(-18, 18)$

C. $(-18, 6)$

D. $(-6, 6)$

【答案】 A

【解析】 设切点坐标为 $(x_0, x_0^3 - 3x_0)$, $f'(x) = 3x^2 - 3$,

所以切线方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$,

因为过点 $M(3, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线 ,

所以方程 $t - (x_0^3 - 3x_0) = (3x_0^2 - 3)(3 - x_0)$ 有 3 个不同的实数根 ,

所以方程 $t = -2x_0^3 + 9x_0^2 - 9$ 有 3 个不同的实数根 ,

令 $g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 9$,

$g'(x) = -6x(x - 3)$,

当 $x < 0$ 或 $x > 3$ 时 , $g'(x) < 0$,

当 $0 < x < 3$ 时 , $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(3, +\infty)$ 上是减函数 , 在 $(0, 3)$ 上是增函数 ,

又因为 $g(0) = -9$, $g(3) = 18$,

所以 t 的取值范围是 $(-9, 18)$.

综上所述 , 答案选择 A .

【标注】 【知识点】 参变分离法求零点个数 ; 求切线条数问题

14. 2019~2020学年4月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考第15题5分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$, 函数 $g(x) = f(x) - kx + 1$ 有四个零点 , 则实数 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

【解析】 由 $g(x) = f(x) - kx + 1 = 0$ 得 $kx = f(x) + 1$,

当 $x = 0$ 时 , $0 = f(0) + 1 = 0 + 1$ 不成立 ,

即 $x \neq 0$,

则 $k = \frac{f(x) + 1}{x}$,

若 $g(x)$ 有四个零点 , 则等价于 $k = \frac{f(x) + 1}{x}$ 有四个不同的根 ,

设 $h(x) = \frac{f(x) + 1}{x}$,

则当 $x > 0$ 时 , $h(x) = \frac{x \ln x - 2x + 1}{x} = \ln x + \frac{1}{x} - 2$,

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

则当 $x > 1$ 时 , $h'(x) > 0$, 函数为增函数 ,

当 $0 < x < 1$ 时 , $h'(x) < 0$, 函数为减函数 ,

即此时当 $x = 1$ 时 , $h(x)$ 取得极小值 ,

极小值为 $h(1) = -1$,

当 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$,

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } h(x) = \frac{x^2 + \frac{3}{2}x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2},$$

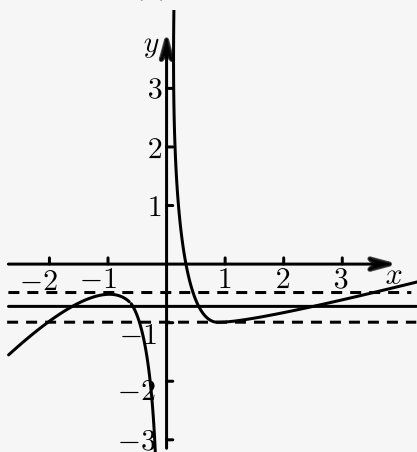
$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

由 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$ (舍) 或 $x < -1$, 此时函数为增函数,

由 $h'(x) < 0$ 得 $-1 < x < 0$, 此时 $h(x)$ 为减函数,

即当 $x = -1$ 时, $h(x)$ 取得极大值, 极大值为 $h(-1) = -1 - 1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$,

作出函数 $h(x)$ 的图象如图:



要使 $k = \frac{f(x) + 1}{x}$ 有四个根,

则满足 $-1 < k < -\frac{1}{2}$,

即实数 k 的取值范围是 $(-1, -\frac{1}{2})$.

故答案为: $(-1, -\frac{1}{2})$.

【标注】【素养】数学抽象; 数学运算

【知识点】求参数范围 (含参指对型导函数)

【思想】数形结合思想

15. 2019~2020学年4月天津和平区天津市耀华中学高二下学期月考第7题5分 ★★

点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x - 2$ 的距离的最小值是 ().

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 因为点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上任意一点,

所以当过点 P 处的切线和直线 $y = x - 2$ 平行时, 点 P 到直线 $y = x - 2$ 的距离最小.

直线 $y = x - 2$ 的斜率等于 1, 令 $y' = 2x - \frac{1}{x} = 1$,

解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ (舍去),

故曲线 $y = x^2 - \ln x$ 和直线 $y = x - 2$ 平行的切线经过的切点坐标为 $(1, 1)$,

点 $(1, 1)$ 到直线 $y = x - 2$ 的距离等于 $\sqrt{2}$,
 $\therefore$ 点 P 到直线 $y = x - 2$ 的最小距离为 $\sqrt{2}$.
 故选 B .

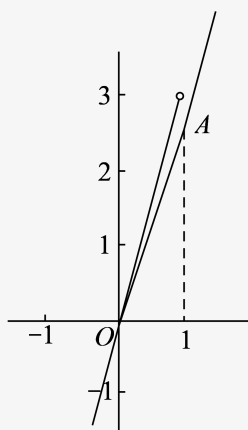
【标注】【知识点】利用切线求最值

16. 2019~2020学年天津武清区武清区杨村第四中学高三上学期期中第14题5分 ★★★

已知 $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x < 1 \\ e^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = kx$ 有且仅有一个实数解, 则实数 k 的取值范围
 为 _____ .

【答案】 $(-\infty, e)$

【解析】 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \geq e$,
 方程 $f(x) = kx$ 有且仅有一个实数解,
 即 $y = f(x)$ 与 $y = kx$ 的图像只有一个交点, 如图所示,



可得 $k < e$, 即实数 k 的取值范围为 $(-\infty, e)$.

【标注】【知识点】函数零点的概念；利用导数求函数的单调性、单调区间；已知零点或根情况求参数范围

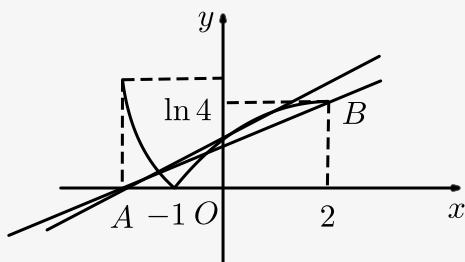
17. 2017~2018学年天津和平区天津市第一中学高二下学期期末理科第10题3分 ★★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (-2 \leq x \leq -1) \\ \ln(x+2) & (-1 < x \leq 2) \end{cases}$, 若 $g(x) = f(x) - a(x+2)$ 的图象与 x 轴有 3 个不同的交点, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{1}{e-1})$ B. $(0, \frac{1}{3e})$ C. $[\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e})$ D. $[\frac{2\ln 2}{3}, \frac{1}{3e})$

【答案】 C

【解析】 $g(x) = f(x) - a(x+2)$ 的图象与 x 轴有 3 个不同的交点,



即 $y = f(x)$ 与 $y = a(x+2)$ 的图象有 3 个不同的交点，

$y = a(x+2)$ 与 $y = \ln(x+2)$ 相切时，

设切点 $C(x_0, y_0)$ ，

$y' = \frac{1}{x+2}$ 且 $y = a(x+2)$ 的斜率为 a ，

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{x_0+2} \\ a(x_0+2) = \ln(x_0+2) \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_0 = -2 \\ a = \frac{1}{e} \end{cases},$$

又 $\because$ 直线 $y = a(x+2)$ 过定点 $A(-2, 0)$ ，

$f(x)$ 过定点 $B(2, \ln 4)$ ，

$$\therefore k_{AB} = \frac{\ln 4}{2 - (-2)} = \frac{\ln 2}{2},$$

$$\therefore a \in \left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{e} \right).$$

故选 C.

【标注】【知识点】求参数范围（含参一次型导函数）

18. 2020~2021 学年江苏苏州姑苏区苏州中学高二下学期期中第 14 题 5 分 ★★

已知函数 $f(x) = x - 1 - \ln x$ ，对定义域内的任意 x 都有 $f(x) \geq kx - 2$ ，则实数 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $k \leq 1 - \frac{1}{e^2}$

【解析】 $f(x) = x - 1 - \ln x$ ，若对定义域内任意 x 都有 $f(x) \geq kx - 2$ ，

则 $k \leq 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

令 $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ ，则 $g'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}$ ，

令 $g'(x) > 0$ ，解得 $x > e^2$ ，

令 $g'(x) < 0$ ，解得 $0 < x < e^2$ ，

故 $g(x)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递减，在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)$ 的最小值是 $g(e^2) = 1 - \frac{1}{e^2}$ ，

故 $k \leq 1 - \frac{1}{e^2}$ 。

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；已知单调性求参数的取值范围；利用导数求函数的最值

3. 逆应用

19. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高二下学期期中第12题3分 ★★

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

由题意知, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

$\because f(x)$ 是奇函数, $f(-1) = 0$,

$\therefore f(1) = -f(-1) = 0$,

$\therefore g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 从而 $f(x) < 0$.

又 $\because g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$,

$\therefore g(x)$ 是偶函数,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g(x) < 0$, 从而 $f(x) > 0$;

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f(x) < 0$.

综上, 所求 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

【标注】 【知识点】 幂函数型导数构造

20. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高二下学期期中第9题 ★★

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 其导函数记为 $f'(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ 恒成立, 若 $f(2) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{x-1} > 0$ 的解集为 () .

- A. $(-2, 0) \cup (1, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 1)$ C. $(1, 2) \cup (-\infty, -2)$ D. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because x > 0$ 时, $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$,

$\therefore$ 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减,

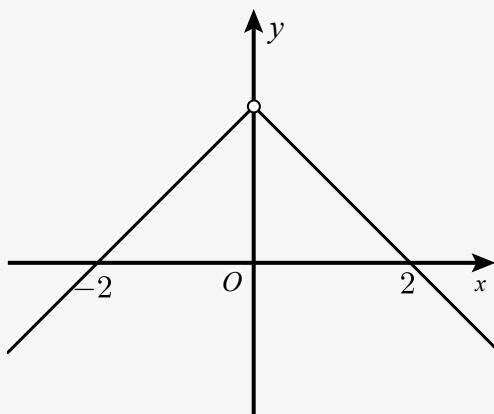
$\because f(x)$ 为奇函数,

$\therefore F(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(2) = 0$,

$\therefore F(2) = 0$,

即 $F(x)$ 草图如下:



该题目问题可转化为“求 $F(x) \frac{x}{x-1} > 0$ 的解集”,

$$\textcircled{1} \begin{cases} F(x) > 0 \\ \frac{x}{x-1} > 0 \end{cases}, \text{解得 } -2 < x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2,$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} F(x) < 0 \\ \frac{x}{x-1} < 0 \end{cases}, \text{解得 } x \in \varnothing,$$

综上 $x \in (-2, 0) \cup (1, 2)$.

故选 A.

【标注】【知识点】幂函数型导数构造

21. 2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高二下学期期中第10题4分 ★★★

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 有 $f(x) > f'(x)$, 且 $y = f(x) + 2019$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2019e^x < 0$ 的解集为 ().

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $\because f(x) > f'(x)$,

$\therefore$ 构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

$\therefore g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

又 $y = f(x) + 2019$ 为奇函数,

$\therefore f(0) + 2019 = 0, f(0) = -2019$,

$\therefore$ 不等式 $f(x) + 2019e^x < 0$ 等价于 $\frac{f(x)}{e^x} < f(0) = \frac{f(0)}{e^0}$,

$\therefore$ 根据 $\frac{f(x)}{e^x}$ 的单调性, 可知 $x > 0$,

故选 B .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

22. 2019年四川成都锦江区四川师范大学附属中学高三下学期高考模拟理科第9题5分 ★★

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时 , $f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$. 若 $a = \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$, $b = -2f(-2)$, $c = \ln \frac{1}{3}f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$, 则 a , b , c 的大小关系正确的是 () .

A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

【答案】 B

【解析】 根据题意 , 设 $g(x) = xf(x)$, 若 $y = f(x)$ 为奇函数 , 则

$g(-x) = (-x)f(-x) = xf(x) = g(x)$, 则函数 $g(x)$ 为偶函数 , 当 $x > 0$ 时 ,

$g'(x) = (x)'f(x) + xf'(x) = f(x) + xf'(x) = x \left[f'(x) + \frac{f(x)}{x} \right]$, 当 $x \neq 0$ 时 ,

$f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$, 则 $g'(x) < 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数 ,

$a = \frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right)$, $b = -2f(-2) = g(-2) = g(2)$,

$c = \left(\ln \frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\ln \frac{1}{3}\right) = g\left(\ln \frac{1}{3}\right) = g(\ln 3)$, 且 $\frac{2}{3} < \ln 3 < 2$, 则有 $b < c < a$. 故选 B

【标注】【知识点】导数与单调性 ; 用单调性比较大小

23. 2019~2020学年4月天津和平区天津市耀华中学高二下学期月考第10题5分 ★★★

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$, 当 $x \geq 0$ 时 , 恒有 $\frac{x}{2}f'(x) + f(-x) < 0$, 若

$g(x) = x^2f(x)$, 则不等式 $g(x) < g(1-2x)$ 的解集为 () .

- A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$
- C. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$,

$\therefore f(-x) = f(x)$,

$\because x \geq 0$ 时 , 恒有 $\frac{x}{2}f'(x) + f(-x) \leq 0$,

$\therefore x^2f'(x) + 2xf(x) \leq 0$,

$\because g(x) = x^2f(x)$,

$\therefore g'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x) \leq 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 为减函数 ,

$\because f(x)$ 为偶函数 ,
 $\therefore g(x)$ 为偶函数 ,
 $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数 ,
 $\therefore g(x) < g(1-2x)$,
 $\therefore |x| > |1-2x|$,
 即 $(x-1)(3x-1) < 0$,
 解得 $\frac{1}{3} < x < 1$.
 故选 A .

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；函数单调性与奇偶性综合问题

24. 2019~2020学年9月天津西青区天津市第九十五中学高三上学期月考第8题5分 ★★

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时 , 都有不等式 $f(x) - xf'(x) < 0$ 成立 , 若

$a = f(1), b = 2^{0.4}f(2^{-0.4}), c = \log_4 \frac{1}{2}f\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【解析】 解 : $\because$ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时不等式 $f(x) - xf'(x) < 0$ 成立 ,

$$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0 ,$$

$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 .

$$\text{则 } b = 2^{0.4}f(2^{-0.4}) = \frac{f(2^{-0.4})}{2^{-0.4}} = g(2^{-0.4}) ,$$

$$c = \log_4 \frac{1}{2}f\left(\log_4 \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{2}f(-2) = \frac{f(-2)}{-2} = g(-2) ,$$

$$a = f(1) = \frac{f(1)}{1} = g(1) ,$$

又 $\because$ 函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 ,

$\therefore g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 ,

$$\text{则 } g(-2) = g(2) ,$$

$$\because 0 < 2^{-0.4} < 1 ,$$

$$\therefore 2^{-0.4} < 1 < 2 ,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数 ,

$$\therefore g(2^{-0.4}) < g(1) < g(2) ,$$

$$\text{即 } g(2^{-0.4}) < g(1) < g(-2) ,$$

$$\text{则 } b < a < c ,$$

故选 : D .

【标注】【知识点】导数与奇偶性结合

25. 2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高二下学期期末第10题4分 ★★★

$f(x)$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$, 对任意实数 a, b , 若 $a < b$, 则必有 () .

- A. $af(b) \leq f(a)$ B. $bf(a) \leq f(b)$ C. $af(a) \leq bf(b)$ D. $bf(b) \leq af(a)$

【答案】D

【解析】令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = xf'(x) + f(x) \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上时非增函数,

若 $a < b$, 则 $g(a) \geq g(b)$,

所以 $bf(b) \leq af(a)$.

故选 D.

【标注】【知识点】用单调性比较大小

26. 2019~2020学年天津滨海新区南开中学滨海生态城学校高二下学期期中第20题5分 ★★★

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) + xf'(x) > 0$, 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集是 _____ .

【答案】 $\{x | x > 3 \text{ 或 } x < -3\}$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore xf(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

又 $\because f(3) = 0$,

$\therefore f(-3) = -f(3) = 0$,

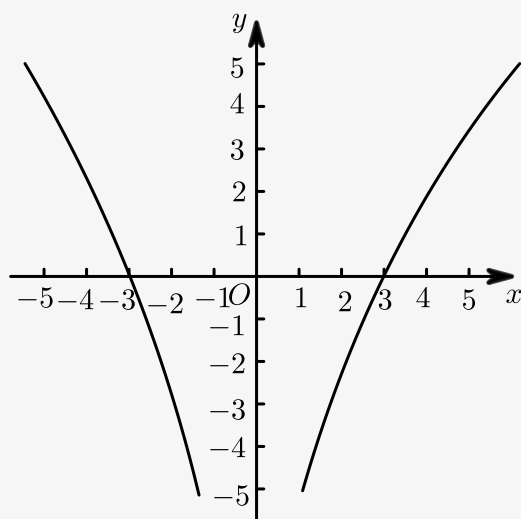
又 $\because$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) + xf'(x) > 0$,

即当 $x > 0$ 时, $[xf(x)]' > 0$,

即 $xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore$ 当 $0 < x < 3$ 时, $xf(x) < 0$, 当 $x > 3$ 时, $xf(x) > 0$,

$\therefore$ 当 $x < -3$ 时, $xf(x) > 0$, 当 $-3 < x < 0$ 时, $xf(x) < 0$, 其图象如下:



$\therefore$ 不等式 $xf(x) > 0$ 的解集为： $\{x|x > 3 \text{ 或 } x < -3\}$.

故答案为： $\{x|x > 3 \text{ 或 } x < -3\}$.

【标注】【知识点】抽象函数；利用函数单调性解不等式