

不等式综合

一、填空题

1. 设 $x + 3y = 2$, 则 $z = 3^x + 27^y$ 的最小值是 _____ .

【答案】 6

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

2. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $4x + 2y - xy = 0$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $6 + 4\sqrt{2}$

【解析】 $4x + 2y - xy = 0 \Rightarrow \frac{4}{y} + \frac{2}{x} = 1$,

$$x + y = 1 \cdot (x + y) = \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{y} \right) (x + y) = 2 + 4 + \frac{2y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 6 + 4\sqrt{2} ,$$

等号成立当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{4x}{y}$, 与 $4x + 2y - xy = 0$ 联立得 $x = 2\sqrt{2} + 2$, $y = 4 + 2\sqrt{2}$;

故 $x + y$ 最小值为 $6 + 4\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用

3. 已知 $b > 2a > 0$, 求 $b^2 + \frac{1}{a(b-2a)}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】 $b^2 + \frac{1}{a(b-2a)}$

$$= b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2a(b-2a)}$$

$$\geq b^2 + 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= b^2 + \frac{8}{b^2}$$

$$\geq 2\sqrt{8}$$

$$= 4\sqrt{2} .$$

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用

4. 设 $a+b=2, b>0$, 则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 方法一：因为 $a+b=2$, 所以

$$\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a}{4|a|} + \frac{b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} \geq 1 + \frac{a}{4|a|}.$$

显然当 $a < 0$, 且 $b=2|a|$ 时, 上式取等号,

此时 $b=-2a$, 联立 $a+b=2$, 解得 $a=-2$,

此时 $1 + \frac{a}{4|a|} = 1 - \frac{2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}$. 所以 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

方法二： $\because a+b=2, b>0$,

$$\therefore b=2-a>0, \text{ 得 } a<2, \text{ 令 } t = \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a+b}{4|a|} + \frac{|a|}{b}.$$

(1) 当 $0 < a < 2$ 时,

$$t = \frac{a+b}{4a} + \frac{a}{b} = \frac{1}{4} + \frac{b}{4a} + \frac{a}{b} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{b}{4a} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4},$$

当且仅当 $\frac{b}{4a} = \frac{a}{b}$, 即 $b=2a, a=\frac{2}{3}$ 时, t 取得最小值 $\frac{5}{4}$;

(2) 当 $a < 0$ 时,

$$t = -\frac{a+b}{4a} - \frac{a}{b} = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{b}{4a}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right) \geq -\frac{1}{4} + 2 \cdot \sqrt{\left(-\frac{b}{4a}\right) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)} = -\frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

当且仅当 $-\frac{b}{4a} = -\frac{a}{b}$, 即 $b=-2a, a=-2$ 时, t 取得最小值 $\frac{3}{4}$,

$$\therefore \frac{5}{4} > \frac{3}{4},$$

$\therefore \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

5. 函数 $y = a^{1-x} (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny - 1 = 0 (mn > 0)$ 上, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 4

【解析】 $y = a^{1-x}$, 当 $x=1$ 时, $y = a^0 = 1$, 所以定点 A 为 $(1, 1)$,

A 点在直线 $mx + ny - 1 = 0$, 则 $m + n = 1$,

$mn > 0$, 则 mn 同号,

$m + n = 1$, 则 $m > 0, n > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} &= (m+n) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 4, \quad (\text{此处用到均值不等式}), \\ \therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \text{的最小值为} 4. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

6. 已知正数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{b+1}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 正数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 $a+1+b+1=4$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{a+1} + \frac{4}{b+1} &= \frac{1}{4} [(a+1) + (b+1)] \left(\frac{1}{a+1} + \frac{4}{b+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(5 + \frac{b+1}{a+1} + \frac{4(a+1)}{b+1} \right) \geq \frac{1}{4} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b+1}{a+1} \times \frac{4(a+1)}{b+1}} \right) = \frac{1}{4} \times (5+4) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

当且仅当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{8}{3}$ 时原式有最小值.

故答案为: $\frac{9}{4}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

7. 若正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$, 则 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 $\because$ 正实数 a, b 满足 $(2a+b)^2 = 1+6ab$,

$$\therefore ab = \frac{(2a+b)^2 - 1}{6},$$

$$\therefore (2a+b)^2 = 1+6ab \leq 1+3 \times \left(\frac{2a+b}{2} \right)^2,$$

解得 $2a+b \leq 2$, 当且仅当 $b=2a=1$ 取等号.

$$\text{则 } \frac{ab}{2a+b+1} = \frac{(2a+b)^2 - 1}{6(2a+b) + 6} = \frac{2a+b-1}{6} \leq \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6},$$

$\therefore \frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 $\frac{1}{6}$.

故答案为: $\frac{1}{6}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用

8. 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 4xy$, 则 $x + \frac{y}{2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{9}{8}$

【解析】 根据题意, 若 $x + 2y = 4xy$, 则有 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 4$,

$$\begin{aligned} \text{则 } x + \frac{y}{2} &= \frac{1}{4} \times \left(x + \frac{y}{2}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} + 2\right) \\ &= \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

当且仅当 $x = y = \frac{3}{4}$ 时等号成立;

即 $x + \frac{y}{2}$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

故答案为: $\frac{9}{8}$.

【标注】 【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

二、解答题

9. 解关于 x 的不等式:

(1) $x^2 + ax + 4 > 0 (a \in \mathbf{R})$.

(2) $x^2 - (a + 2)x + 2a > 0$.

【答案】 (1) ①当 $a > 4$ 或 $a < -4$ 时, $\left\{x \mid x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} \text{ 或 } x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}\right\}$;

②当 $a = 4$ 或 $a = -4$ 时, $\left\{x \mid x \neq -\frac{a}{2}\right\}$;

③当 $-4 < a < 4$ 时, $\mathbf{R}$.

(2) ①当 $a > 2$ 时, $\{x \mid x > a \text{ 或 } x < 2\}$;

②当 $a = 2$ 时, $\{x \mid x \neq 2\}$;

③当 $a < 2$ 时, $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < a\}$.

【解析】 (1) 已知 $\Delta = a^2 - 16$,

①当 $a > 4$ 或 $a < -4$ 时, $\Delta > 0$, 令 $x^2 + ax + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$,
 $\therefore x^2 + ax + 4 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} \text{ 或 } x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{2}\right\}$;

②当 $a = 4$ 或 $a = -4$ 时, $\Delta = 0$, 令 $x^2 + ax + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$,
 $\therefore x^2 + ax + 4 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x \neq -\frac{a}{2}\right\}$;

③当 $-4 < a < 4$ 时, $\Delta < 0$, 令 $x^2 + ax + 4 = 0 \Rightarrow x$ 无解,

$\therefore x^2 + ax + 4 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

(2) 令 $x^2 - (a+2)x + 2a = (x-a)(x-2) = 0$, 解得 $x = 2$ 或 a ,

①当 $a > 2$ 时, $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$ 的解集为 $\{x|x > a \text{ 或 } x < 2\}$;

②当 $a = 2$ 时, $\Delta = 0$, 令 $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$ 的解集为 $\{x|x \neq 2\}$;

③当 $a < 2$ 时, $x^2 - (a+2)x + 2a > 0$ 解集为 $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < a\}$.

【标注】【知识点】解不等式中的分类讨论

10. $f(x)$ 时定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若不等式 $f(ax^2 + x + 1) \leq f(1)$ 对任意的 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 $a \in [-3, -2]$.

【解析】 由函数奇偶性以及函数单调性可将不等式转化为:

$$|ax^2 + x + 1| \leq 1, \text{ 即 } -1 \leq ax^2 + x + 1 \leq 1, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{ 则 } -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \leq a \leq -\frac{1}{x}$$

恒成立.

$$-\frac{1}{x} \in [-2, -1], -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \leq -3, \text{ 则 } a \in [-3, -2].$$

故答案为: $a \in [-3, -2]$.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题; 不等式中的恒成立与能成立问题

11. 已知不等式 $mx^2 - (m+1)x + 1 > 0$.

(1) 当 $m = 3$ 时解此不等式.

(2) 若对于任意的实数 $x \in (-2, -1)$, 此不等式恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$.

(2) $m \geq -\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) $3x^2 - 4x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$.

(2) $(x^2 - x)m > x - 1$ 恒成立, $\because -2 < x < -1, \therefore x - 1 < 0, xm < 1, m > \frac{1}{x}$ 恒成立,

$$\because \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}, \therefore m \geq -\frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题; 一元二次不等式

12. 已知函数 $f(x) = |x| + 2|x - a| (a > 0)$

(1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 4$.

(2) 若不等 $f(x) \geq 4$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $\left[-\frac{2}{3}, 2\right)$.

(2) $a \geq 4$.

【解析】 (1) 当 $x \geq 1$ 时, $x + 2(x - 1) \leq 4 \Rightarrow x \leq 2, \therefore x \in [1, 2]$,

当 $0 \leq x < 1$ 时, $x + 2(1 - x) \leq 4 \Rightarrow x \geq -2, \therefore x \in [0, 1]$,

当 $x < 0$ 时, $-x + 2(1 - x) \leq 4 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}, \therefore x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right)$,

综上所述, 不等式的解集为 $\left[-\frac{2}{3}, 2\right)$.

(2) $\because f(x) \geq 4$ 恒成立,

$\therefore f(x)_{\min} \geq 4$,

考虑 $f(x) = |x| + 2|x - a| = \begin{cases} 3x - 2a, & x \in [a, +\infty) \\ 2a - x, & x \in [0, a) \\ 2a - x, & x \in [-\infty, 0) \end{cases}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(a) = a, \therefore a \geq 4$.

【标注】【知识点】利用单调性求函数最值; 分段函数; 不等式中的恒成立与能成立问题

13. 已知函数 $f(x) = |x - 1|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 1$.

(2) 存在实数 x , 使不等式 $f(x) + |x + 2| - m \leq 0$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\{x | x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0\}$.

(2) $m \geq 3$.

【解析】 (1) $f(x) \geq 1$, 即 $|x - 1| \geq 1$,

故 $x - 1 \geq 1$ 或 $x - 1 \leq -1$,

解得: $x \geq 2$ 或 $x \leq 0$,

故不等式的解集是 $\{x | x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0\}$.

(2) 不等式 $f(x) + |x + 2| - m \leq 0$ 有解,

即 $m \geq |x - 1| + |x + 2|$ 有解,

即 $m \geq (|x - 1| + |x + 2|)_{\min}$,

而 $|x - 1| + |x + 2| \geq |x - 1 - x - 2| = 3$,

故 $m \geq 3$.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；含绝对值的不等式