

不等式综合

一轮整合计划

数列求和：倒序相加法（加法型）

如果一个数列 $\{a_n\}$ ，与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法，如等差数列的前 n 项和即是用此法推导的。

数列求和：错位相减法（减法型）

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求，如等比数列的前 n 项和就是用此法推导的。

数列求和：裂项相消法（除法型）

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得和。

常见的拆项公式有：

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}; \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$
$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$
$$n \cdot n! = (n+1)! - n!;$$
$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

数列求和：分组求和法（乘法型）

有一类数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，即先分别求和，然后再合并，形如： $\{a_n + b_n\}$ ，其中 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是等比数列。

数列求和：并项求和法（括号型）

一个数列的前 n 项和中，则两两结合求解，则称之为并项求和，形如：求

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \dots - 99^2 + 100^2.$$

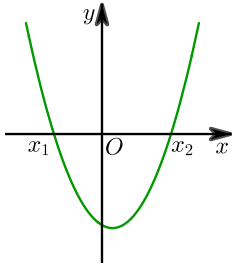
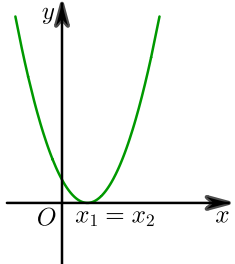
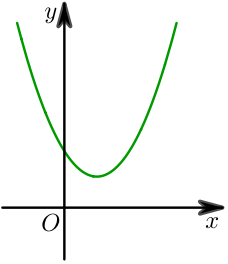
一、不等式与含参不等式

1. 一元二次不等式的解法

(1)三个“二次”之间的关系

由一元二次不等式的一般形式知，任何一个一元二次不等式整理成一般形式为

$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ ，而且我们已经知道对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ ，其中 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，它的解按照 $\Delta > 0$ ， $\Delta = 0$ ， $\Delta < 0$ 可分为三种情况。相应地，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况，因此，对应的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a > 0$) 的解集我们也分三种情况进行讨论。

		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象				
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根		有两不同实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
	$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbb{R}$
	$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

(2)解一元二次不等式的一般步骤

- ①对不等式变形，使一端为零且二次项系数大于零；
- ②计算判别式 Δ ；
- ③当 $\Delta \geq 0$ 时，求出相应的一元二次方程的根；
- ④根据二次函数图象写出一元二次不等式的解集.

1. 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 ().

- A. $(-4, -1)$ B. $(-4, 1)$
C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 1]$

【答案】 C

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

- 【答案】 C

【标注】 **【知识点】** 交集

- 【答案】 D

【标注】【知识点】一元二次不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 (\geq 0) \text{ 或 } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 (\leq 0) \text{ (其中 } f(x), g(x) \text{ 为整式且 } g(x) \text{ 不为 } 0).$$

(2)分式不等式的解法

解分式不等式的思路——转化为整式不等式来解.

化分式不等式为标准形式的方法：移项，通分，右边化为0，左边化为 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式.

将分式不等式转化为整式不等式(组)求解如下：

分式	不等式同解变形1	同解变形2
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$f(x)g(x) > 0$
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$f(x)g(x) < 0$
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

【易错提示】

分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ (或 ≤ 0)与不等 $f(x)g(x) \geq 0$ (或 ≤ 0)不是同解不等式，将分式不等式转化为整式不等式后，应注意分子可取零，而分母不能取零.

4. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \geq 0$ 的解集为 () .

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$
- B. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
- C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$
- D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 由 $\frac{x-1}{2x+1} \geq 0$,

得： $(x-1)(2x+1) \geq 0$,

解得： $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$.

又因为分母不为0，所以 $x \neq -\frac{1}{2}$.

故： $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 分式不等式

5. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 的解集是 () .

- A. $\{x | -4 < x < 2\}$
- B. $\{x | x < -1\}$
- C. $\{x | -4 < x < -1\}$
- D. $\{x | x < -4 \text{ 或 } x > 1\}$

【答案】 C

【解析】 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 即 $\frac{2-x}{x+4} - 1 > 0$,
通分得 $\frac{-2-2x}{x+4} > 0$, 即 $\frac{x+1}{x+4} < 0$,
故 $-4 < x < -1$. 故选 C .

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 分式不等式

6. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 0$ 的解集为 () .

- A. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$
- B. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
- C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$
- D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 原不等式等价于 $\begin{cases} (x-1)(2x+1) \leq 0, \\ 2x+1 \neq 0, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x \neq -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $-\frac{1}{2} < x \leq 1$.
故原不等式的解集为 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

【标注】 【知识点】 分式不等式

【素养】 数学运算

3. 高次不等式的解法

(1) 概念

最高次项的次数高于二次的不等式称为高次不等式

(2)解法步骤：穿根法(穿针引线法)

①**化形**：将不等式化为一端为0，另一端为一次因式或二次不可约因式的积的形式，并使每个因式最高次项的系数为正；

②**求根，标根**：求出各因式对应方程的根，并在数轴上从小到大依次标出，注意点的虚实；

③**画曲线**：从数轴的最右端上方起，自右至左依次经过各个点(根)画曲线，注意遇奇次重根一次穿过数轴，遇偶次重根穿而不过；

④**写解集**：记数轴上方为正，下方为负，根据不等号的方向，写出不等式的解集.

【注意】

在用穿针引线法求解一元高次不等式的过程中要注意：

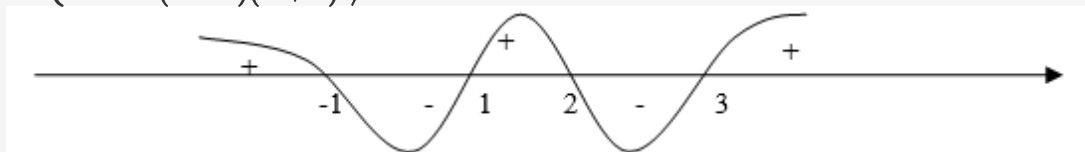
(1)区间端点能否取到；

(2)各因式中的最高次项系数必须为正.

7. 不等式 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} \leq 0$ 的解集为 _____ .

【答案】 $\{x | -1 < x \leq 1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$

【解析】 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \neq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3)(x+1) \leq 0 \\ (x-3)(x+1) \neq 0 \end{cases}$ ，用数轴标根法（零点分段法）画图如下：



$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x | -1 < x \leq 1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.

【标注】 【知识点】分式不等式

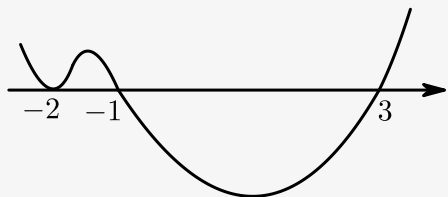
8. 解不等式 $\frac{(x+1)^3(x+2)^2}{x-3} > 0$

【答案】 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (3, +\infty)$

【解析】 $\therefore \frac{(x+1)^3(x+2)^2}{x-3} > 0$.

$\therefore (x-3)(x+2)^2(x+1)^3 > 0$.

根据穿根引线法可得



∴解集为： $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (3, +\infty)$.

【标注】【知识点】高次不等式

4. 利用函数单调性解不等式

对于能够判断单调性的函数，可将所给的不等式转化为相同结构式后利用函数单调性化简不等式，进而求解.

9. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} > 3^{-2x}$ 的解集是 _____ .

【答案】 $\{x | -2 < x < 4\}$

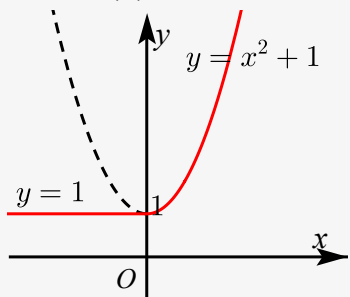
【解析】 将不等式变形得 $3^{-x^2+8} > 3^{-2x}$ 则 $-x^2+8 > -2x$, 从而 $x^2-2x-8 < 0$, 解得 $-2 < x < 4$, 所以不等式的解集是 $\{x | -2 < x < 4\}$.

【标注】【知识点】解指数不等式

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 _____ .

【答案】 $(-1, \sqrt{2}-1)$

【解析】 由函数 $f(x)$ 的图像可知满足 $f(1-x^2) > f(2x)$ 分两种情况：



$$\textcircled{1} \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1-x^2 > 2x \end{cases} \Rightarrow x < \sqrt{2}-1 . \textcircled{2} \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0 . \text{ 综上所述, } \\ -1 < x < \sqrt{2}-1 .$$

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；函数求值问题；分段函数

11. 已知 $a > 0, a \neq 1$, 解不等式 $\log_a(4 + 3x - x^2) - \log_a(2x - 1) > \log_a 2$.

【答案】 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x | 2 < x < 4\}$, 当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集是

$$\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}.$$

【解析】 解法一: 由原不等式, 得 $\log_a(4 + 3x - x^2) > \log_a(4x - 2)$.

$$(I) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, 不等式的解应满足 } \begin{cases} 4 + 3x - x^2 > 0, \\ 4x - 2 > 0, \\ 4 + 3x - x^2 < 4x - 2, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x < -3x > 2, \end{cases}$$

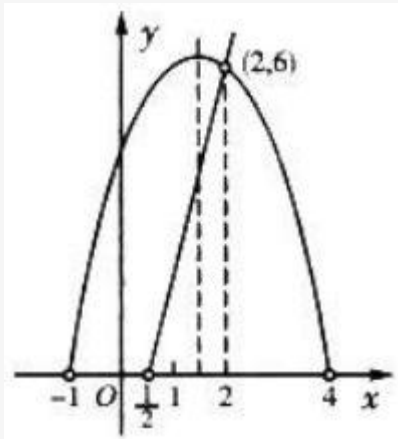
$$\therefore 2 < x < 4.$$

$$(II) \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, 不等式的解应满足 } \begin{cases} 4 + 3x - x^2 > 0, \\ 4x - 2 > 0, \\ 4 + 3x - x^2 > 4x - 2, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x > \frac{1}{2}, \\ -3 < x < 2, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 2.$$

综上所述, 当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集是 $\{x | 2 < x < 4\}$, 当 $a > 1$ 时, 原不等式的解集是 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$.

解法二: 如图, 作出 $y = -x^2 + 3x + 4$ 及 $y = 4x - 2$ 的图象, 其中 $y = -x^2 + 3x + 4 > 0$ 与 $y = 4x - 2 > 0$ 两图象的交点为 $(2, 6)$.



从图象可以看出, 当 $a > 1$ 时, 应有 $\frac{1}{2} < x < 2$; 当 $0 < a < 1$ 时, 应有 $2 < x < 4$.

$\therefore$ 原不等式的解集: 当 $0 < a < 1$ 时, 为 $\{x | 2 < x < 4\}$; 当 $a > 1$ 时, 为 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\right\}$

【标注】【知识点】对数的运算; 解对数不等式

12. 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < x$ 的解集是 ().

- A. $(0, 2)$
- B. $(2, +\infty)$
- C. $(2, 4]$

D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 不等式化为 $\begin{cases} 4x - x^2 > 0 \\ x > 0 \\ 4x - x^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x > 0 \\ x > 2 \text{ 或 } x < 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 4.$

故选C.

【标注】 【知识点】 无理不等式

13. 不等式 $\sqrt{2x^2 + 1} - x \leq 1$ 的解集是 _____ .

【答案】 $[0, 2]$

【解析】 方法一：原不等式等价于 $\begin{cases} 2x^2 + 1 \leq (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$,

解得 $0 \leq x \leq 2$.

方法二：

$$\sqrt{2x^2 + 1} - x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 1} \leq 1 + x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 \leq (1+x)^2 \\ 1+x > 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \{x | 0 \leq x \leq 2\}$$

故答案为： $[0, 2]$.

【标注】 【知识点】 无理不等式

5. 绝对值不等式

14. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x+2| + |x-1| \leq 5$ ”是“ $-2 \leq x \leq 3$ ”的 () .

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 D

【解析】 对于“ $|x+2| + |x-1| \leq 5$ ”来说,

$x \leq -2$ 时, $-x-2+1-x \leq 5$, 得 $-3 \leq x \leq -2$,

$-2 < x < 1$ 时, $x+2+1-x \leq 5$, 得 $-2 < x < 1$,

$x \geq 1$ 时, $x+2+x-1 \leq 5$, 得 $1 \leq x \leq 2$,

即 $x \in [-3, 2]$,

易得，为既不充分也不必要条件．

故选D．

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

15. 不等式 $|x-1| - |x-5| < 2$ 的解集是 () ．

A. $(-\infty, 4)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, 4)$

D. $(1, 5)$

【答案】 A

【解析】 当 $x \geq 5$ 时，原式 $= x - 1 - (x - 5) < 2$ ，即 $4 < 2$ ，显然不成立

当 $1 \leq x < 5$ 时，原式 $= x - 1 + x - 5 < 2$ ，即 $1 \leq x < 4$ ，

当 $x \leq 1$ 时，原式 $= 1 - x + 5 - x < 2$ ，即 $-4 < 2$ 恒成立，

综合上述， $x \in (-\infty, 4)$ ，

故选A．

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

【素养】数学运算

16. 不等式 $\left| \frac{x}{2-x} \right| > \frac{x}{2-x}$ 的解集是 () ．

A. $\{x|0 < x < 2\}$

B. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

C. $\{x|x < 0\}$

D. $\{x|x > 2\}$

【答案】 B

【解析】 $\left| \frac{x}{2-x} \right| > \frac{x}{2-x}$ ，

即 $\frac{x}{2-x} < 0$ ，

即 $x(2-x) < 0$ ，

$\therefore x > 2 \text{ 或 } x < 0$ ，

$\therefore$ 解集为 $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ ．

故选B．

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

6. 含参不等式的解法

在解含有参数的一元二次不等式时，往往要对参数进行分类讨论，为了做到分类“不重不漏”，一般从如下三个方面进行考虑：

(1)关于不等式类型的讨论：二次项的系数 $a > 0$ ， $a = 0$ ， $a < 0$ 。

(2)关于不等式对应的方程的根的讨论：两根($\Delta \geq 0$)，无根($\Delta < 0$)；

(3)关于不等式对应的方程根的大小的讨论： $x_1 > x_2$ ， $x_1 = x_2$ ， $x_1 < x_2$ 。

17. 已知不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集为 $(2, 3)$ ，则不等式 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 的解集为_____。

【答案】 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\right\}$

【解析】 根据不等式的关系 $a = 2 + 3 = 5$ ， $-b = 2 \times 3$ ， $b = -6$ ，

所以所求不等式为 $-6x^2 - 5x - 1 > 0$ ，

解得 $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$ ，

解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\right\}$ 。

【标注】【知识点】一元二次不等式

【素养】数学运算

18. 解关于 x 的不等式： $x^2 - (2 + a)x + 2a < 0$ 。

【答案】 答案见解析。

【解析】 化简 $(x - a)(x - 2) < 0$ ，

当 $a > 2$ 时，解得 $2 < x < a$ ， $\{x \mid 2 < x < a\}$ ；

当 $a = 2$ 时， x 无解， $x \in \emptyset$ ；

当 $a < 2$ 时，解得 $a < x < 2$ ， $\{x \mid a < x < 2\}$ 。

【标注】【知识点】解不等式中的分类讨论；一元二次不等式；含字母系数的不等式

19. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (2a + 1)x + 2 < 0$ 。

【答案】 当 $a = 0$ 时，原不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$ ；

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$ ；

当 $a = \frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\emptyset$ ；

当 $a > \frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$ ；

当 $a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\right\}$.

【解析】 (1) 当 $a = 0$ 时, 有 $-(x-2) < 0 \Rightarrow x > 2$;

(2) 当 $a > 0$ 时, $(ax-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$.

由 $\frac{1}{a} - 2 = \frac{1-2a}{a}$, 有

①当 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1-2a}{a} > 0 \end{cases}$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} > 2$, 此时 $2 < x < \frac{1}{a}$;

②当 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1-2a}{a} = 0 \end{cases}$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} = 2$, 此时不等式无解;

③当 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1-2a}{a} < 0 \end{cases}$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} < 2$, 此时 $\frac{1}{a} < x < 2$.

(3) 当 $a < 0$ 时, $(ax-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) > 0$,

$\therefore a < 0$,

$\therefore \frac{1}{a} < 0$,

$\therefore \frac{1}{a} < 2$.

此时 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$;

当 $a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\right\}$.

【标注】【思想】分类讨论思想

【素养】逻辑推理; 数学运算

【知识点】一元二次不等式; 解不等式中的分类讨论

20. 已知关于 x 的不等式 $(m-3)x^2 - (m-2)x + 1 > 0$.

解关于 x 的不等式 $(m-3)x^2 - (m-2)x + 1 > 0$.

【答案】 (1) 当 $m = 3$ 时, 解集为 $(-\infty, 1)$;

当 $3 < m \leq 4$ 时, 解集为 $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{1}{m-3}, +\infty\right)$;

当 $m > 4$ 时, 解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{m-3}\right) \cup (1, +\infty)$;

当 $m < 3$ 时, 解集为 $\left(\frac{1}{m-3}, 1\right)$.

【解析】(1) ①当 $m = 3$ 时, 即 $-x + 1 > 0$, 解得 $x < 1$.

②当 $m > 3$ 时, 即 $[(m-3)x-1](x-1) > 0$.

(i) 当 $3 < m \leq 4$ 时, 解得 $x > \frac{1}{m-3}$ 或 $x < 1$.

(ii) 当 $m > 4$ 时, 解得 $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{m-3}$.

③当 $m < 3$ 时, 即 $[(3-m)x+1](x-1) < 0$,

解得 $\frac{1}{m-3} < x < 1$.

综上: 当 $m = 3$ 时, 解集为 $(-\infty, 1)$;

当 $3 < m \leq 4$ 时, 解集为 $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{1}{m-3}, +\infty\right)$;

当 $m > 4$ 时, 解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{m-3}\right) \cup (1, +\infty)$;

当 $m < 3$ 时, 解集为 $\left(\frac{1}{m-3}, 1\right)$.

【标注】【知识点】含字母系数的不等式

二、基本不等式

1. 定义

(1) 重要不等式

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

(2) 基本不等式

如果 $a > 0, b > 0$, 那么 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

其中 $\frac{a+b}{2}$, 叫做正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 叫做正数 a, b 的几何平均数.

因此, 基本不等式可以叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

从数列的角度来看, 如果把 $\frac{a+b}{2}$ 看作正数 a, b 的 2 等差中项, $\sqrt{ab}$ 看作正数 a, b 的等比中项, 那么基本不等式可以叙述为: 两个正数的等差中项不小于它们的等比中项.

【温馨提示】

①基本不等式成立的条件是 $a > 0, b > 0$.

②从不等式成立的条件来看, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 要求 $a > 0, b > 0$, 而 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 对 a, b 没有要求. 例如, 当 $a = -2, b = -3$ 时, $(-2)^2 + (-3)^2 \geq 2 \times (-2) \times (-3)$ 成立, 但

$\sqrt{(-2) \times (-3)} \leq \frac{(-2) + (-3)}{2}$ 显然不成立.

③事实上, 当 $a > 0, b > 0$ 时, 我们分别用 $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ 代替重要不等式中的 a, b , 可得 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 变形可得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

④基本不等式可变形为 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 等.

⑤由基本不等式, 我们可以得到一个常用结论: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 (ab > 0)$.

2. 基本不等式使用条件

(1) 利用基本不等式求最值的条件

利用基本不等式求最值, 必须同时满足以下三个条件: 一正、二定、三相等

即: ① x, y 都是正数.

②积 xy (或和 $x+y$)为定值(有时需通过“配凑、拆分”找出定值).

③ x 与 y 必须能够相等(等号能够取到).

特别地, 当式子中等号不成立时, 不能应用基本不等式, 而应改用函数的单调性求最值.

(2) 构造定值条件的常用技巧

①加项变换; ②拆项变换; ③统一换元; ④平方后利用基本不等式.

(3) 基本不等式与最值

设 x, y 是正数, ①若 $x+y=S$ (和为定值), 则当 $x=y$ 时, 积 $x \cdot y$ 取得最大值 $\frac{S^2}{4}$;

②若 $x \cdot y=P$ (积为定值), 则当 $x=y$ 时, 和 $x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{P}$.

3. 不等式链

若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立. 其中 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 分别叫做 a, b 的调和平均数和平方平均数.

【温馨提示】

上述不等式链内涵丰富, 在实际的运用中相对于基本不等式更为广泛, 但它们都是在基本不等式的基础上拓展而来的, 也都可以由基本不等式(重要不等式)加以证明. 一般来说, 以下四组不等式可以作为基本不等式(重要不等式)的应用形态:

- ① $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} (a > 0, b > 0)$;
- ② $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{a+b} (a > 0, b > 0)$;
- ③ $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 (ab > 0)$;
- ④ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbb{R})$.

4. 常见题型

定义法

21. 已知正数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 _____ .

【答案】 2

【解析】 正数 x, y 满足 $xy = 1$,

$$\text{则 } x^2 + y^2 \geq 2xy = 2,$$

当且仅当 $x = y = 1$ 时, 取得最小值, 且为2.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

22. 设 $x > 0, y > 0$, 且 $xy - (x + y) = 1$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $2 + 2\sqrt{2}$

【解析】 $\because xy - (x + y) = 1$,

$$\text{得 } \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - (x+y) \geq 1,$$

$$\text{解得 } x + y \geq 2 + 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

23. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 8$, 那么 ab 的最大值等于 ().

A. 4

B. 8

C. 16

D. 32

【答案】 B

【解析】 $a > 0, b > 0, \therefore a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$,

$$\therefore 2\sqrt{2ab} \leq 8 \Rightarrow \sqrt{2ab} \leq 4 \Rightarrow 2ab \leq 16 \Rightarrow ab \leq 8,$$

故选B.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

24. 已知 $0 < x < 1$, 则 $\sqrt{x(1-x)}$ 的最大值是 _____ .

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\because 0 < x < 1$,

$$\therefore \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x + (1-x)}{2} = \frac{1}{2}. \text{ 当且仅当 } x = 1-x = \frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

故 $\sqrt{x(1-x)}$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

25. 若 $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 _____ .

【答案】4

【解析】方法一： $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab} &\geq \frac{2\sqrt{a^4 \cdot 4b^4} + 1}{ab} = \frac{4a^2b^2 + 1}{ab} \\ &= 4ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4.\end{aligned}$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} a^4 = 4b^4 \\ 4ab = \frac{1}{ab} \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2b^2 = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\text{即} a = \frac{1}{4\sqrt{2}}, b = \frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 或 } a = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 时取“=”},$$

$\therefore$ 上式的最小值为4 .

方法二： $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab} &= \frac{a^3}{b} + \frac{4b^3}{a} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} \\ &\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{4b^3}{a} \cdot \frac{1}{2ab} \cdot \frac{1}{2ab}} = 4,\end{aligned}$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} a^4 = 4b^4 \\ 4ab = \frac{1}{ab} \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2b^2 = \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\text{即} a = \frac{1}{4\sqrt{2}}, b = \frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 或 } a = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{4\sqrt{8}} \text{ 时取“=”},$$

$\therefore$ 上式的最小值为4 .

故答案为：4 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

“1”的利用

26. 若 $a, b > 0$, 且满足 $2a + b = 3$, 则 $-\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $-\frac{8}{3}$

【解析】 略.

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用

【素养】 数学运算

27. 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$, 则 $\frac{1}{y} + \frac{8}{x}$ 的最小值为 ____ .

【答案】 9

【解析】 $\because$ 正数 x, y 满足 $x + 2y = 2$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{y} + \frac{8}{x} &= \frac{1}{2}(x + 2y)\left(\frac{1}{y} + \frac{8}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(10 + \frac{16y}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq \frac{1}{2}\left(10 + 2\sqrt{\frac{16y}{x} \cdot \frac{x}{y}}\right) = 9\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{16y}{x} = \frac{x}{y}$ 即 $x = \frac{4}{3}$ 且 $y = \frac{1}{3}$ 时取等号.

故答案为: 9.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念

28. 若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 则 $3x + 4y$ 的最小值是 ().

A. $\frac{24}{5}$

B. $\frac{28}{5}$

C. 5

D. 6

【答案】 C

【解析】 $\because$ 正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$,

$$\therefore \frac{3}{5x} + \frac{1}{5y} = 1,$$

$$\therefore 3x + 4y = \left(\frac{3}{5x} + \frac{1}{5y}\right)(3x + 4y) = \frac{9}{5} + \frac{4}{5} + \frac{12y}{5x} + \frac{3x}{5y} \geq \frac{13}{5} + 2 \times \sqrt{\frac{12y}{5x} \cdot \frac{3x}{5y}} = 5$$

当且仅当 $\frac{12y}{5x} = \frac{3x}{5y}$ 时取等号,

$\therefore 3x + 4y$ 的最小值是 5.

故选 C.

【标注】 【知识点】 基本不等式成立的条件

29. 已知 $x > 0, y > 0, x + y = 1$, 则 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ 的最小值为 ____ .

【答案】 9

【解析】 $\because x + y = 1$,

$\therefore$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \left(1 + \frac{x+y}{x}\right)\left(1 + \frac{x+y}{y}\right) = \left(2 + \frac{y}{x}\right)\left(2 + \frac{x}{y}\right) = 5 + 2\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq 9$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, 且 $x + y = 1$ 时等号成立, 即 $x = y = \frac{1}{2}$ 时等号成立.

【标注】【知识点】基本不等式的概念

 加減常数

30. 设 $x > 2$, 则 $y = x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值是 _____, 此时 $x =$ _____.

【答案】 6; 4

【解析】 $y = x + \frac{4}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 2 \geq 6$, 当且仅当 $x = 4$ 时等号成立.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

31. 求解:

已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数 $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

【答案】 (1) 1 .

【解析】 (1) $\because x < \frac{5}{4}$, $\therefore 4x - 5 < 0$.

$$\begin{aligned}\therefore y &= 4x - 5 + \frac{1}{4x-5} + 3 = -\left[(5-4x) + \frac{1}{5-4x}\right] + 3 \\ &\leq -2\sqrt{(5-4x) \cdot \frac{1}{5-4x}} + 3 = 1, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号.} \\ \therefore y_{\max} &= 1.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 基本不等式的概念

32. 已知 $x < \frac{3}{2}$, 则函数 $f(x) = 2x + \frac{4}{2x-3}$ 的值域是 _____.

【答案】 $(-\infty, -1]$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

 二次比一次

33. $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 的最小值 _____ , 此时 $x =$ _____ .

【答案】 $4; \pm\sqrt{3}$

【解析】 $y = \frac{x^2 + 1 + 4}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 4$, 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 时, 即 $x = \pm\sqrt{3}$ 等号成立 .

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念

34. 设 $x < 1$, 则 $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】 令 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增, 在 $(0, 1)$ 递减,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -1]$.

【标注】 【素养】 数学运算

【素养】 逻辑推理

【知识点】 基本不等式的实际应用

【知识点】 用分离常数法求值域

【方法】 分离常数法

35. 已知 x 、 y 均为正实数, 且 $x + y = 16$, 则 $\frac{xy}{9x + y}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 1

【解析】 $\frac{xy}{9x + y} = \frac{1}{\frac{9}{y} + \frac{1}{x}}$,

由 $x + y = 16$,

可得 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{16}(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right)$

$$= \frac{1}{16} \left(1 + 9 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} \right) \geq \frac{1}{16} \left(10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{9x}{y}} \right) = 1,$$

当且仅当 $y = 3x = 12$ 时, 等号成立,

则 $\frac{1}{\frac{9}{y} + \frac{1}{x}} \leq 1$, 即 $\frac{xy}{9x + y}$ 的最大值为 1.

故答案为: 1.

【标注】【知识点】倒数和形式; 基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

一次比二次

36. 解答下列问题:

函数 $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$ 的值域是 _____.

【答案】 (1) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right]$

【解析】 (1) 略

【标注】【知识点】用换元法求值域

二次比二次

37. 函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$ 的值域是 _____.

【答案】 $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right]$

【解析】 函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4} = 1 + \frac{x}{x^2 + 4}$,

当 $x = 0$ 时, $y = 1$;

当 $x > 0$ 时, $y = 1 + \frac{1}{x + \frac{4}{x}} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}} = \frac{5}{4}$,

当且仅当 $x = 2$ 时取得最大值 $\frac{5}{4}$;

当 $x < 0$ 时, $y = 1 + \frac{4}{x + \frac{4}{x}} \geq 1 - \frac{1}{2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}}} = \frac{3}{4}$,

当且仅当 $x = -2$ 时取得最小值 $\frac{3}{4}$.

则函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$ 的值域是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right]$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

【知识点】用分离常数法求值域

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【方法】分离常数法

二消一（消元）

38. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为() .

A. 1

B. 6

C. 9

D. 16

【答案】B

【解析】 $\because$ 正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \therefore a > 1$, 且 $b > 1$,
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 变形为 $\frac{a+b}{ab} = 1, \therefore ab = a+b, \therefore ab - a - b = 0, \therefore (a-1)(b-1) = 1, \therefore$
 $a-1 = \frac{1}{b-1},$
 $\because a-1 > 0, \therefore \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = \frac{1}{a-1} + 9(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot 9(a-1)} = 6,$
当且仅当 $\frac{1}{a-1} = 9(a-1)$, 即 $a = 1 \pm \frac{1}{3}$ 时取“=”(由于 $a > 1$, 故取 $a = \frac{4}{3}$),
 $\therefore \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为6.
故选B.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

39. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 ____ .

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 $\because a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$,
 $\therefore a = 3b - 6,$
 $2^a + \frac{1}{8^b} = 2^{3b-6} + \frac{1}{2^{3b}}$
 $= \frac{2^{3b}}{2^6} + \frac{1}{2^{3b}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{4},$
当且仅当 $\frac{2^{3b}}{2^6} = \frac{1}{2^{3b}},$
即 $a = -3, b = 1$ 时取得最小值.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

40. 已知 $a > 0, b > 1$ 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{a^2 + 3}{a} + \frac{b^2 + 2}{b - 1}$ 的最小值为 _____.

【答案】 15

【解析】 $\frac{a^2 + 3}{a} + \frac{b^2 + 2}{b - 1}$
 $= a + \frac{3}{a} + \frac{b^2 - 1 + 3}{b - 1}$
 $= a + \frac{3}{a} + b + 1 + \frac{3}{b - 1}$.
 $\because b = 2 - a$.
 $\therefore$ 原式 $= a + \frac{3}{a} + 3 - a + \frac{3}{1 - a}$
 $= 3 \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{1 - a} \right)$
 $= 3 \left(1 + \frac{1}{a(1 - a)} \right)$.
 $\because a + b = 2, b > 1, a > 0$.
 $\therefore a \in (0, 1)$.
 $\therefore$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 原式取得最小值 15.
 故答案为: 15.

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

换元法

41. 设 x, y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2}{x + 2} + \frac{y^2}{y + 1}$ 的最小值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 设 $x + 2 = s, y + 1 = t$, 则 $s + t = x + y + 3 = 4$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{x^2}{x + 2} + \frac{y^2}{y + 1} \\ &= \frac{(s - 2)^2}{s} + \frac{(t - 1)^2}{t} \\ &= \left(s - 4 + \frac{4}{s} \right) + \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) \\ &= (s + t) + \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t} \right) - 6 \\ &= \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t} \right) - 2. \\ \text{因为 } & \frac{4}{s} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t} \right) (s + t) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4t}{s} + \frac{s}{t} + 5 \right) \geq \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases} \frac{4t}{s} = \frac{s}{t} \\ s+t=4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} s = \frac{8}{3} \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$ 也即 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ 时取等，
故当 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ 时， $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1}$ 取得最小值 $\frac{1}{4}$ 。

【标注】【知识点】基本不等式的概念

42. 已知 $a, b, c > 0$ ，求 $\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$ 的最小值。

【答案】当 $a = 3 - 2\sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{2} - 1$ ， $c = \sqrt{2}$ 时，为最小值。

【解析】令 $x = a + 2b + c$ ， $y = a + b + 2c$ ， $z = a + b + 3c$ ，

$$\text{则有 } a + 3c = 2y - x, b = z + x - 2y, c = z - y,$$

故有原式

$$\begin{aligned} &= \frac{2y-x}{x} + \frac{4(z+x-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} \\ &= -17 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 4 \cdot \frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{z}{y} + 8 \cdot \frac{y}{z} \\ &\geq -17 + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} = -17 + 12\sqrt{2}, \end{aligned}$$

当 $a = 3 - 2\sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{2} - 1$ ， $c = \sqrt{2}$ 时，等号成立。

【标注】【知识点】代数换元

拆补结合

43. 已知 $a > b > 0$ ，则 $2a + \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a-b}$ 的最小值为 _____。

【答案】 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

【解析】 $\because 2a + \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a-b} = 2a + b - b + \frac{3}{a+b} + \frac{2}{a-b}$
 $= a + b + \frac{3}{a+b} + a - b + \frac{2}{a-b}$. ①

$$\because a > b > 0, \therefore a+b > 0, a-b > 0,$$

$$\therefore \text{①式} \geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{3}{a+b}} + \sqrt{(a-b) \cdot \frac{2}{a-b}} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ 时，取“=”。

【标注】【知识点】基本不等式的概念

44. 已知正实数 a, b 满足 $a > b$ ，且 $ab = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{4a^2 + b^2 + 1}{2a - b}$ 的最小值为 _____。

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 法一：

$$\text{原式} = \frac{(2a-b)^2 + 4ab + 1}{2a-b} = 2a-b + \frac{3}{2a-b} \geq 2\sqrt{3},$$

当且仅当 $2a-b = \frac{3}{2a-b}$ 时取等。

法二：

$$\begin{aligned} & \frac{4a^2 + b^2 + 1}{2a-b} \\ &= \frac{(2a+b)(2a-b) + 2b^2 + 1}{2a-b} \\ &= 2a+b + \frac{2b^2 + 1}{2a-b} \\ &= 2a-b + \frac{3}{2a-b}. \end{aligned}$$

$\because a > b > 0$.

$\therefore \text{原式} \geq 2\sqrt{3}$.

当且仅当 $2a-b = \frac{3}{2a-b}$ 时成立。

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用

45. 已知正数 a, b 满足 $a^2 + ab - 3 = 0$, 则 $4a + b$ 的最小值为 _____.

【答案】 6

【解析】 $\because$ 正数 a, b 满足 $a^2 + ab - 3 = 0$, $\therefore 3a \cdot (a+b) = 9$.

$$\text{则 } 4a+b = 3a + (a+b) \geq 2\sqrt{3a \cdot (a+b)} = 2\sqrt{9} = 6,$$

当且仅当 $3a = a+b$, $a^2 + ab - 3 = 0$, 即 $b = 2a = 2$ 时取等号。

则 $4a+b$ 的最小值为 6。

故答案为：6。

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念

46. 设 $a > b > 0$, 则 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是 _____.

【答案】 4

【解析】 方法一： $\because a > b > 0$, 故 $ab > 0$, $a(a-b) > 0$,

$$a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = a^2 - ab + ab + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$$

$$= ab + \frac{1}{ab} + a(a-b) + \frac{1}{a(a-b)} \geq 2 + 2 = 4$$

当且仅当 $ab = 1$, $a(a-b) = 1$ 时等号成立, 解得 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{方法二: } a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} = a^2 + \frac{a-b+b}{ab(a-b)} = a^2 + \frac{1}{b(a-b)},$$

$\because a > 0, a-b > 0, \therefore b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, 当 $b = a-b$, 即 $a = 2b$ 时取到等号.

$$\text{从而 } a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} \geq a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{a^2}} = 4,$$

当且仅当 $a^2 = \frac{4}{a^2}$, 即 $a = \sqrt{2}$ 时取到等号.

从而当 $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号同时取到, 此时 $a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)}$ 有最小值 4.

故答案为: 4.

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

三、不等式中的恒成立与能成立

(1)含参数的不等式的恒成立问题

通过分离参数, 把参数的范围问题转化为函数的最值问题. 在 $f(x)$ 的最大值与最小值存在的条件下,

$a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\max}$; $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\min}$.

(2)一元二次不等式的恒成立问题

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 均成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0; \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 均成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

②若 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a \neq 0$) 在 $x \in [x_1, x_2]$ 时恒成立, 可利用单调性或分离参数法等求解.

(3)含参数的不等式的能成立问题

通过分离参数, 把参数的范围问题转化为函数的最值问题. 在 $f(x)$ 的最大值与最小值存在的条件下,

$a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)_{\min}$; $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)_{\max}$.

47. 不等式 $ax^2 + ax + 1 \geq 0$ 对一切实数恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $0 < a < 4$

B. $0 \leq a < 4$

C. $0 < a \leq 4$

D. $0 \leq a \leq 4$

【答案】 D

【解析】 当 $a = 0$ 时, 不等式化为 $1 \geq 0$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时需满足 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$,

所以 $0 < a \leq 4$,

综上可知, 实数 a 的取值范围是 $0 \leq a \leq 4$.

【标注】【知识点】一元二次不等式

【素养】数学运算

48. 不等式 $(a-3)x^2 < (4a-2)x$ 对 $a \in (0, 1)$ 恒成立, 则 x 的取值范围是 _____.

【答案】 $\{x|x \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq -1\}$

【解析】 $(a-3)x^2 < (4a-2)x$ 对 $a \in (0, 1)$ 恒成立.

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x)a + (2x - 3x^2) < 0$ 对 $a \in (0, 1)$ 恒成立.

将 a 看做主元, x 看成参数,

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 4x) \cdot 0 + 2x - 3x^2 \leq 0 \\ (x^2 - 4x) \cdot 1 + 2x - 3x^2 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq 0 \\ x \geq 0 \text{ 或 } x \leq -1 \end{cases}$

$\therefore x \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq -1$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $\{x|x \geq \frac{2}{3} \text{ 或 } x \leq -1\}$.

【标注】【知识点】一元二次不等式

49. 不等式 $|x+3| - |x-1| \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

B. $[-1, 4]$

C. $[1, 2]$

D. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $\because |x+3| - |x-1| \leq 4$,

由题意可知 $a^2 - 3a \geq 4$,

$$\text{即 } a^2 - 3a - 4 \geq 0,$$

$\therefore$ 解得 $a \geq 4$ 或 $a \leq -1$.

故选 A.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题

50. 已知 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$, 对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a \geq -3$.

【解析】 方法一: 已知 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$, 对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x} \geq 0$ ($x \geq 1$) 恒成立等价于 $\varphi(x) = x^2 + 2x + a \geq 0$ ($x \geq 1$) 恒成立,

$\therefore \varphi(x) = (x+1)^2 + a - 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(1) = a + 3,$$

$$\therefore a + 3 \geq 0, \therefore a \geq -3.$$

方法二: 因 $\frac{x^2 + 2x + a}{x} \geq 0$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立,

故有 $x^2 + 2x + a \geq 0$ ($x \geq 1$) 恒成立,

即 $a \geq -x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 恒成立,

故满足 $a \geq (-x^2 - 2x)_{\max}$ ($x \geq 1$) 即可

$$\therefore -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1,$$

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $-x^2 - 2x$ 在 $[1, +\infty)$ 上取得最大值 -3 ,

故 $a \geq -3$.

故答案为: $a \geq -3$.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题

51. 若关于 x 的不等式 $2x^2 - 8x - 4 - a > 0$ 在 $1 \leq x \leq 4$ 内有解, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $a < -4$

B. $a > -4$

C. $a > -12$

D. $a < -12$

【答案】 A

【解析】 $2x^2 - 8x - 4 - a > 0$ 在 $1 \leq x \leq 4$ 内有解,

即 $2x^2 - 8x - 4 > a$ 在 $1 \leq x \leq 4$ 内有解,

$$\text{令 } f(x) = 2x^2 - 8x - 4 = 2(x-2)^2 - 12,$$

易得 $f(x)$ 在 $1 \leq x \leq 4$ 上的值域为 $[-12, -4]$,

所以 $a < -4$ 即可.

故选 A.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】一元二次不等式

52. 已知函数 $f(x) = mx^2 + (1-3m)x - 4$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) > -1$.

(3) 当 $m < 0$ 时, 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) 最大值和最小值分别为 4 和 -5.

(2) $\{x | -\frac{1}{m} < x < 3\}$.

(3) $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{9}, 0)$.

【解析】 (1) 当 $m = 1$ 时,

函数 $f(x) = x^2 - 2x - 4$ 在 $(-2, 1)$ 上是减函数, 在 $(1, 2)$ 上是增函数.

又 $f(-2) = 4$, $f(1) = -5$, $f(2) = -4$,

所以, $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值分别为 4 和 -5.

(2) 不等式 $f(x) > -1$, 即 $mx^2 + (1-3m)x - 3 > 0$,

当 $m = 0$ 时, 解得 $x > 3$.

当 $m \neq 0$ 时, $(x-3)(mx+1) = 0$ 的两根为 3 和 $-\frac{1}{m}$,

当 $m > 0$ 时, $-\frac{1}{m} < 3$, 不等式的解集为 $\{x | x < -\frac{1}{m} \text{ 或 } x > 3\}$.

当 $m < 0$ 时, $3 - (-\frac{1}{m}) = \frac{3m+1}{m}$,

所以, 当 $m < -\frac{1}{3}$ 时, $-\frac{1}{m} < 3$, 不等式的解集为 $\{x | -\frac{1}{m} < x < 3\}$.

当 $m = -\frac{1}{3}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$.

当 $-\frac{1}{3} < m < 0$ 时, $3 < -\frac{1}{m}$, 不等式的解集为 $\{x | 3 < x < -\frac{1}{m}\}$.

综上, 当 $m > 0$ 时, 解集为 $\{x | x < -\frac{1}{m} \text{ 或 } x > 3\}$;

当 $m = 0$ 时, 解集为 $\{x | x > 3\}$;

当 $-\frac{1}{3} < m < 0$ 时, 解集为 $\{x | 3 < x < -\frac{1}{m}\}$;

当 $m = -\frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\emptyset$;

当 $m < -\frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\{x | -\frac{1}{m} < x < 3\}$.

(3) 因为 $m < 0$, 所以 $f(x) = mx^2 + (1 - 3m)x - 4$ 是开口向下的抛物线,
 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{1 - 3m}{2m} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2m} > 1$,
 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 则 $(1 - 3m)^2 + 16m > 0$,
 即 $9m^2 + 10m + 1 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $-\frac{1}{9} < m < 0$,
 综上, m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{9}, 0)$.

【标注】【知识点】已知解集求参问题；解不等式中的分类讨论

53. 设函数 $f(x) = |2x + 2| - |x - 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) > 2$ 的解集.

(2) 若 $\forall x \in R, f(x) \geq t^2 - \frac{7}{2}t$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围.

【答案】 (1) $\{x | x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < -6\}$.

(2) $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = |2x + 2| - |x - 2| = \begin{cases} -x - 4, & x < -1 \\ 3x, & -1 \leq x \leq 2 \\ x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$,

当 $x < -1$ 时, 不等式即 $-x - 4 > 2$, 求得 $x < -6$.

当 $-1 \leq x < 2$ 时, 不等式即 $3x > 2$, 求得 $x > \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{2}{3} < x < 2$,

当 $x \geq 2$ 时, 不等式即 $x + 4 > 2$, 求得 $x > -2$, $\therefore x \geq 2$,

综上所述, 不等式的解集为 $\{x | x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < -6\}$.

(2) 由以上可得 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1) = -3$, 若 $\forall x \in R, f(x) \geq t^2 - \frac{7}{2}t$ 恒成立,
 只要 $-3 \geq t^2 - \frac{7}{2}t$, 即 $2t^2 - 7t + 6 \leq 0$, 求得 $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】含绝对值的不等式

【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题