

三角函数综合

一轮整合计划

周期性对称性之间的关系

“两轴两心四轴心”.

即：有两条竖直对称轴的函数，二倍轴间距为其一个周期；

有两个同一高度的对称中心的函数，二倍中心间距为其一个周期；

既有一条竖直对称轴，又有一个对称中心的函数，中心与轴间距离的四倍为其一个周期.

自对称与互对称的联系与区别

二者从形式上有很多相似之处，例如 $y = f(x)$ 和 $y = f(-x)$ 关于 y 轴对称，同时 $f(x) = f(-x)$ 的函数关于 y 轴对称.

但， $f(x) = f(2a - x)$ 和 $f(a + x) = f(a - x)$ 都说明函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称；

而 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 关于直线 $x = a$ 对称， $f(a + x)$ 和 $f(a - x)$ 是关于直线 $x = 0$ 对称！

零点存在定理的内容和注意事项

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么，函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c \in (a, b)$ ，使得 $f(c) = 0$.

注意事项：①此为充分非必要条件，也即函数不满足以上条件，仍可能有零点；

②如果函数在区间上具有单调性，则“有零点”可强化为“恰有一个零点”.

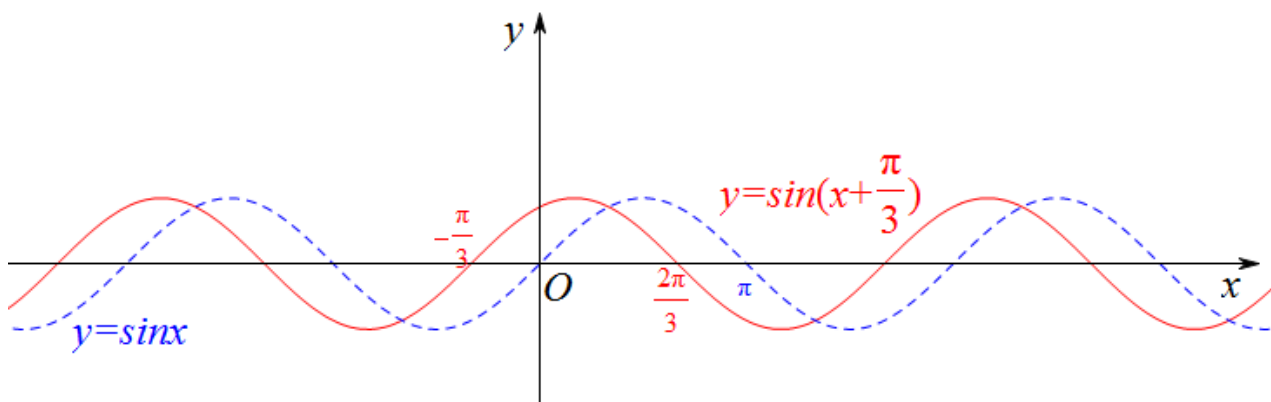
一、与三角函数零点有关的参数求解

1. 三个参数对正弦型函数的图像的影响

φ 对 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图像，可以看作是把 $y = \sin x$ 图像上的各点向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的. (可简记为“左+右-”)

如下图中的 $y = \sin x \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ：



【补充说明】

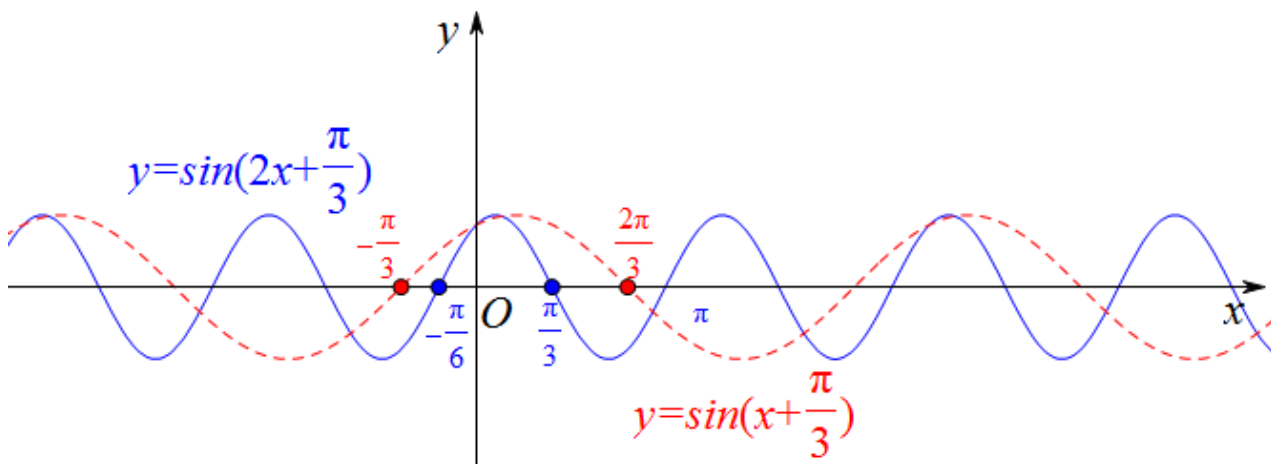
(1) $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin x$ 的图像形状是完全一样的，二者可以通过左右平移变换得到，称此变换为平移变换或相位变换；更一般的结论：任何平移变换均不会改变图像的形状。

(2) 左右平移是针对自变量 x 本身而言的，因此如果 x 有一系列诸如负号或者系数的前缀，应该将其提取之后再行左右平移。

🕒 ω 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图像，可以看作是把 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像上各点的横坐标都缩短 ($\omega > 1$) 或伸长 ($0 < \omega < 1$) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的。

如下图中的 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \rightarrow y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$:



【补充说明】

(1) 由上面的变换发现， ω 可以控制变化函数的“胖瘦”，进而影响函数的周期。

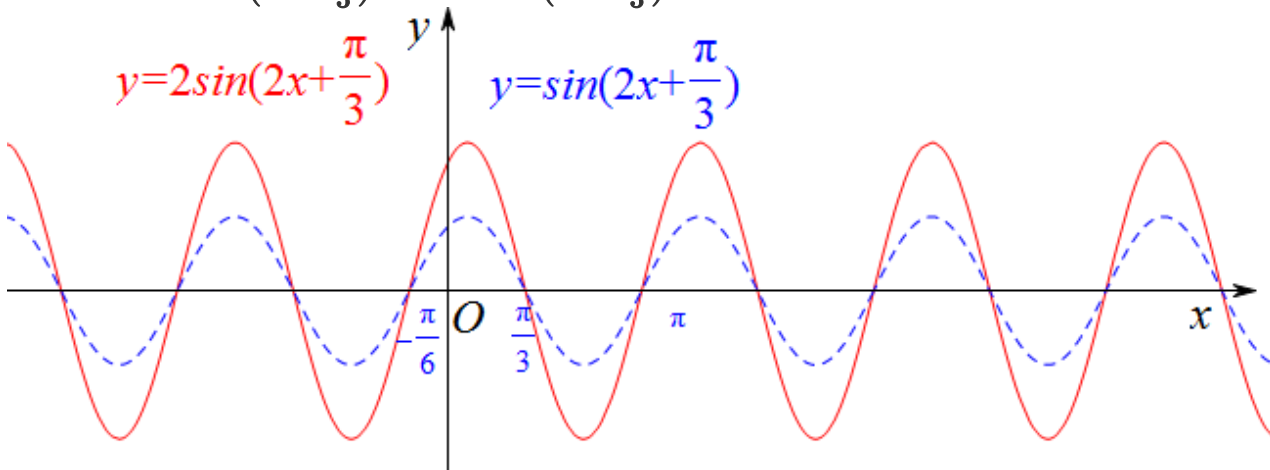
(2) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像的形状不同，此种变换为横向伸缩变换，也称周期变换。

(3) 推广到一般结论：函数 $f(\omega x)$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图像，可以看作是把函数 $f(x)$ 的图像上的点的横坐标缩短 (当 $\omega > 1$ 时) 或伸长 (当 $0 < \omega < 1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到。

🔊 $A(A > 0)$ 对 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的影响

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图像, 可以看作是 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像上各点的纵坐标都伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到的.

如下图中的 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$:



【补充说明】

- (1) 由上面的变化发现, A 可以控制函数的“高矮”, 进而影响函数的振幅.
- (2) 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是 $[-|A|, |A|]$.
- (3) $|A|$ 的大小, 反映了曲线纵向波动幅度的大小.
- (4) $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像形状不同, 此种变换称为纵向伸缩变换, 也叫振幅变换.
- (5) 推广到一般结论: 函数 $y = Af(x)$ ($A > 0$ 且 $A \neq 1$) 的图像, 可以看作是函数 $y = f(x)$ 的图像上的点的纵坐标伸长 ($A > 1$) 或缩短 ($0 < A < 1$) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到.
- (6) 若 $A < 0$, 此时将系数化正有两种处理方法: ①通过一步翻折变换 (参看必修一《函数的图像》一讲) 将 $f(x) \rightarrow -f(x)$ ②利用诱导公式 $-\sin x = \sin[x \pm (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 将系数化正, 如 $-3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \pi\right) = 3 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. 系数化正后再实施振幅变换.

2. 函数零点的概念

对于函数 $y = f(x)$, 我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 的值叫做函数 $y = f(x)$ 的零点.

由函数零点的概念可知, 函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根, 也就是函数 $y = f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标.

由函数零点的概念可知, 函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根, 也就是函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标. 因此有:

方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点.

1.

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到偶函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 () .

- A. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$
 B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right]$
 C. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
 D. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

【答案】 B

【解析】 $\because f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ 的两个相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore T = \pi , \text{ 则 } \omega = 2 ,$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \theta) , \text{ 向左平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 后得到 } g(x) ,$$

$$\therefore g(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \theta\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \theta\right) ,$$

$\because g(x)$ 为偶函数 ,

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} , k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ,$$

$$\therefore \text{令 } k = 0 \text{ 得 : } \theta = \frac{\pi}{6} ,$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) ,$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi , k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\text{得 } k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2}{3}\pi , k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2}{3}\pi\right] , k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的一个减区间可以为 } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi\right] .$$

故选 B .

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间；正余弦型、正切型函数图象变换

2. 若函数 $f(x) = 2\cos 2x + a\sin x - 4$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的图像恒在 x 轴下方, 则 a 的取值范围为 () .

- A. $a \geq \sqrt{3}$
 B. $a \leq \sqrt{3}$
 C. $(-\infty, 4\sqrt{2})$
 D. $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $f(x) = 2 \cos 2x + a \sin x - 4 = 2 - 4 \sin^2 x + a \sin x - 4$

$$= -4 \left(\sin x - \frac{a}{8} \right)^2 + \frac{a^2}{16} - 2,$$

$$\text{令 } t = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\therefore t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \text{ 且 } f(t) \text{ 是以 } t = \frac{a}{8} \text{ 为对称轴且开口向下.}$$

$$(1) a < 0, t = \frac{a}{8} \text{ 在 } y \text{ 轴左侧}, f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -3 + \frac{1}{2}a < 0,$$

$$a < 6 \Rightarrow \text{取 } a < 0;$$

(2) 当 $a > 0$, 分三种情况讨论:

$$\textcircled{1} \frac{1}{2} < \frac{a}{8} < 1 \Rightarrow 4 < a < 8,$$

$$f(t)_{\max} = f\left(\frac{a}{8}\right) = \frac{a^2}{16} - 2 < 0,$$

$$-4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{取 } 4 < a < 4\sqrt{2};$$

$$\textcircled{2} 0 \leq \frac{a}{8} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a \leq 4,$$

$$f(t)_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -3 + a < 0,$$

$$a < 6 \Rightarrow \text{取 } 0 \leq a \leq 4;$$

$$\textcircled{3} f(t)_{\max} = f(1) = -6 + a < 0,$$

$$a < 6 \Rightarrow \text{不合题意, 舍去};$$

$$\text{综上所述: } a < 4\sqrt{2},$$

故选C.

【标注】【知识点】动轴定区间求值域; 用换元法求值域

3. 若函数 $f(x) = \left| \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right) \right| (\omega > 1)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{5\pi}{4} \right]$ 上单调递减, 则实数 ω 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{5} \right]$

【解析】 $f(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{5}{4}\pi \right)$ 上单调减,

$$\therefore T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \geq 2 \left(\frac{5}{4}\pi - \pi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{即 } \omega \geq 2.$$

$$\text{由 } y = |\sin x| \text{ 得, 减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi \right], k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq k\pi + \pi$$

$$k\pi + \frac{3}{4}\pi \leq \omega x \leq \frac{5}{4}\pi + k\pi$$

$$\text{又 } x \in \left[\pi, \frac{5}{4}\pi \right], \omega > 1.$$

$$\therefore \omega x \in \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega \right].$$

$$\text{当 } k=0, \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega \right] \subseteq \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right]$$

$$\therefore \frac{5}{4}\pi\omega \leq \frac{5}{4}\pi,$$

$$\therefore \omega \leq 1.$$

与 $\omega > 1$ 矛盾.

$$\text{当 } k=1 \text{ 时}, \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega \right] \subseteq \left[\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi \right],$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{7}{4}\pi \leq \pi\omega \\ \frac{5}{4}\pi\omega \leq \frac{9}{4}\pi \end{cases}.$$

$$\therefore \frac{7}{4} \leq \omega \leq \frac{9}{5}.$$

$$\text{又 } \omega \leq \frac{9}{5},$$

$$\therefore \frac{7}{4} \leq \omega \leq 2.$$

$$\therefore \text{答案为 } \left[\frac{7}{4}, \frac{9}{5} \right].$$

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

4. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值, 无最小值, 则 ω 的最大值为 ().

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{28}{9}$

C. $\frac{52}{9}$

D. $\frac{100}{9}$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore$ 直线 $x = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}$ 为 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的一条对称轴,

$$\therefore \omega \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \omega = \frac{4}{3}k + \frac{4}{9}, k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值, 无最小值,

$$\therefore T > \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{即 } \frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \omega < 12,$$

$$\therefore \text{当 } k=8 \text{ 时}, \omega = \frac{32}{3} + \frac{4}{9} = \frac{100}{9} \text{ 为最大值.}$$

故选 D.

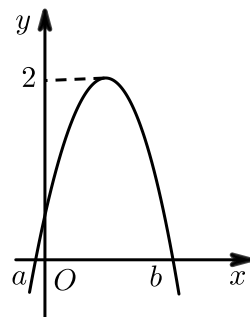
【标注】【知识点】余弦型函数 ω 求最值问题

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 满足 $f(2-x) + f(x) = 0$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 函数 $g(x) = f(x) + 2 \sin \pi x$ 在区间 $(-3, 5)$ 上的所有零点之和为 _____ .

【答案】 15

【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题(图象与零点综合); 函数零点的概念; 对称性

6. 已知函数 $f(x) = A \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, A > 0$) 部分图象如图所示, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 对不同的 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 有 $f(x_1 + x_2) = 1$, 则().



A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$
C. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$
D. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

【答案】 B

【解析】 由题意, 从图看出 $A = 2$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, $f(x_1) = f(x_2)$,

可知 x_1, x_2 关系函数的对称轴是对称的. 即 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 是其中一条对称轴, 且

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 2,$$

$$\therefore \text{函数 } f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 2, \text{ 可得: } 2 \sin \left[\omega \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \varphi \right] = 2,$$

$$\text{可得: } \omega \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \dots \textcircled{1},$$

$$\therefore f(x_1 + x_2) = 1,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x_1 + x_2) = 2A \sin [\omega(x_1 + x_2) + \varphi] = 1,$$

$$\text{可得: } \omega(x_1 + x_2) + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \dots \textcircled{2}.$$

$$\text{令 } k = 0, \text{ 由 } \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 解得: } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 或 } \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

故选B.

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

7. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的零点构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 关于函数 $g(x)$, 下列说法正确的是 ().
- A. 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
B. 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
C. 函数 $g(x)$ 是偶函数
D. 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

【答案】D

【解析】 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x \left(\omega x + \frac{\pi}{3} \right)$,
由函数 $f(x)$ 的零点构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列,
则周期 $T = \pi$, 即 $\omega = 2$,
即 $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$,
把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象,
则 $g(x) = 2 \sin \left[2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = 2 \sin 2x$,
当 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$,
即 $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4}$,
 $y = g(x)$ 是减函数,
故 $y = g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 为减函数,
当 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$,
即 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, $y = g(x)$ 其图象关于直线 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ 对称,
且为奇函数,
故选项 A, B, C 错误;
当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时, $2x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 函数 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$,
故选项 D 正确.
故选 D.

【标注】【知识点】等差中项; 正弦型函数与零点综合问题; 正余弦型、正切型函数图象变换

【素养】数学运算; 直观想象

8.

已知函数 $f(x) = (1 - 2\cos^2 x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - 2\sin x \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ($|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$) 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{6}\right]$

上单调递增, 且 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) \leq m$, 则实数 m 的取值范围为 ().

- A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $[1, +\infty)$ D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x) = (1 - 2\cos^2 x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - 2\sin x \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$= -\cos 2x \cdot (-\cos \theta) - \sin 2x \sin \theta = \cos(2x + \theta) \left(|\theta| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数的最大值为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$,

若 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) \leq m$ 恒成立,

则函数的最大值为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq m$ 恒成立,

而 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$.

$\therefore$ 只要 $1 \leq m$.

故选 C.

【标注】 【素养】逻辑推理

【知识点】 正弦函数的图象和性质

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ().

- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】 D

【解析】 由题意可得, $g(x)$ 由 $f(x)$ 平移得到, 两函数周期为 π , 最小值为 -1 , 最大值为 1 , 若需满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$, 则

$$\begin{cases} f(x_1) = 1 \\ g(x_2) = -1 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} f(x_1) = -1 \\ g(x_2) = 1 \end{cases},$$

若 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 可以得到 $f(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 两函数峰值间距为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$.

故选: D.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

10. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().
- A. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$
B. $\omega = \frac{2}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{12}$
C. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = -\frac{11\pi}{24}$
D. $\omega = \frac{1}{3}$, $\varphi = \frac{7\pi}{24}$

【答案】A

【解析】由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 得 $\frac{T}{4} > \frac{\pi}{2}$,
又 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 得 $\frac{T}{4} = \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$,
 $\therefore T = 3\pi$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$, 即 $\omega = \frac{2}{3}$.
 $\therefore f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \varphi\right)$
 $\therefore$ 由 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{8} + \varphi\right) = 2$, 得 $\sin\left(\varphi + \frac{5\pi}{12}\right) = 1$.
 $\therefore \varphi + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
取 $k = 0$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{12} < \pi$.
 $\therefore \omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$.
故选 A.

【标注】【知识点】正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质

11. 已知 $P\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{12}, -1\right)$ 分别是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上相邻的最高点和最低点, 则 $\omega\varphi =$ ____.

【答案】 $\frac{3\pi}{4}$

【解析】 $\therefore$ 函数过点 $P\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{12}, -1\right)$,
 $\frac{1}{2}T = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}$,
 $\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$,
 $\therefore \omega = 3$,
 $\therefore f(x) = \sin(3x + \varphi)$,

$$\begin{aligned}
 &\text{将 } P\left(\frac{\pi}{12}, 1\right) \text{ 代入, } \sin\left(3 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 1, \\
 &\therefore 3 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \\
 &\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}, \\
 &\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \\
 &\therefore \varphi = \frac{\pi}{4}, \\
 &\therefore \omega\varphi = 3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \\
 &\text{故答案为: } \frac{3\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】【素养】数学运算；直观想象

【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

12. 函数 $f(x) = |\tan x| - \cos x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则其值域为 _____.

【答案】 $\left[-1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 时, $f(x) = |\tan x| - \cos x = -\tan x - \cos x$,

该函数在 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 上为减函数, 则 $f(x) \in \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

由 $f(-x) = |\tan(-x)| - \cos(-x) = |\tan x| - \cos x = f(x)$, 可知 $f(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 时, $f(x) \in \left[-1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$\therefore$ 函数 $f(x) = |\tan x| - \cos x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 的值域为 $\left[-1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

故答案为: $\left[-1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

【标注】【知识点】用单调性观察法求值域；利用定义判断函数奇偶性；单调性

函数 $y = \sin(x + \varphi)$ ($\varphi \neq 0$) 的图像可以看做将函数 $y = \sin x$ 的图像上的所有的点向左 (当 $\varphi > 0$ 时) 或向右 (当 $\varphi < 0$ 时) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到.

13. 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), 若函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$
- B. $\left(0, \frac{5}{6}\right)$
- C. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left(\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

【答案】 C

【解析】 $f(x) = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x = \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$,
 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi$ 可得 $x = -\frac{\pi}{6\omega} + \frac{k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbf{Z}$,
 令 $\pi < -\frac{\pi}{6\omega} + \frac{k\pi}{\omega} < 2\pi$ 解得 $\omega + \frac{1}{6} < k < 2\omega + \frac{1}{6}$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点 ,
 $\therefore$ 区间 $\left(\omega + \frac{1}{6}, 2\omega + \frac{1}{6} \right)$ 内不存在整数 ,
 又 $\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} \geq 2\pi - \pi = \pi$,
 $\therefore \omega \leq 1$,
 又 $\omega > 0$,
 $\therefore \left(\omega + \frac{1}{6}, 2\omega + \frac{1}{6} \right) \subset (0, 1)$ 或 $\left(\omega + \frac{1}{6}, 2\omega + \frac{1}{6} \right) \subset (1, 2)$,
 $\therefore 2\omega + \frac{1}{6} \leq 1$ 或 $1 \leq \omega + \frac{1}{6} < 2\omega + \frac{1}{6} \leq 2$,
 解得 $0 < \omega \leq \frac{5}{12}$ 或 $\frac{5}{6} \leq \omega \leq \frac{11}{12}$.
 故选 C .

【标注】 【知识点】 正弦型函数 ω 求最值问题

14. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0$) . $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____ .

【答案】 π

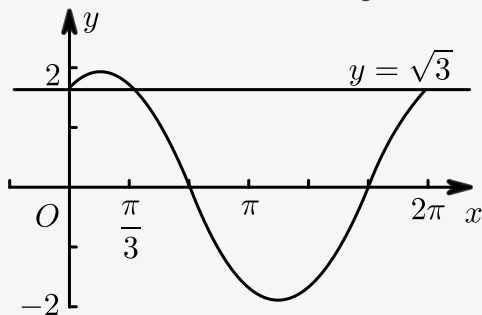
【解析】 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上具有单调性 ,
 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,
 则 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$,
 且函数的图象关于直线 $x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12}$ 对称 ,
 且一个对称点为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$.
 可得 $0 < \omega \leq 3$ 且 $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,
 求得 $\omega = 2$,
 $\therefore f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

【标注】【知识点】求正弦型函数的周期

15. 设常数 a 使方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = a$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 =$ _____.

【答案】 $\frac{7\pi}{3}$

【解析】 原方程可变为 $a = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$,



设 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$, 如图作出函数 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象,
再作直线 $y = a$, 从图象可知函数 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [0, 2\pi]$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上递增,
在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ 上递减, 在 $[\frac{7\pi}{6}, 2\pi]$ 上递增,
只有当 $a = \sqrt{3}$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象有三个交点,
 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = 2\pi$,
所以 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7\pi}{3}$.

【标注】【知识点】正弦型函数与零点综合问题

16. 函数 $y = 2 \sin(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3})$ ($0 \leq x \leq 9$)的最大值与最小值之差为().

A. $2 + \sqrt{3}$

B. 4

C. 3

D. $2 - \sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 由 $0 \leq x \leq 9$ 得 $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$,
所以, 当 $\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, y 取最大值2,
当 $\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ 时, y 取最小值 $-\sqrt{3}$,
所以 y 的最大值与最小值之差为 $2 + \sqrt{3}$, 选A.

【标注】【知识点】正弦函数的图象和性质

17. 方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的所有的解的和等于 _____ .

【答案】 $\frac{7\pi}{3}$

【解析】 解：原方程可变形为 $2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ ，即 $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ，由于 $x \in [0, 2\pi]$ ，所以 $x_1 + x_2 = \frac{7\pi}{3}$.

【标注】 【知识点】 辅助角公式；零点、交点、根的等价转化；函数零点的概念

18. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$ ，在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为 () .

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. π

D. 2π

【答案】 C

【解析】 方法一： $f(x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$.

令 $f(x) = 1$ ，则 $\omega x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ， $k \in \mathbf{Z}$.

则 $\omega|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi$ ，故 $\omega = 2$ ，最小正周期为 π .

方法二： $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ，由 $2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) = 1$ ，得

$\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ，设 x_1, x_2 分别为距离最小的相邻交点的横坐标，则

$\omega x_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ， $\omega x_2 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$)，两式相减，得

$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\omega = 2$ ，故 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的最小正周期为 π .

故选 C .

【标注】 【知识点】 正弦函数的图象和性质

二、三角恒等变换的综合应用

(1) 定义域： $\mathbf{R}$.

(2) 值域： $[-|A|, |A|]$.

(3) 最小正周期： $\left| \frac{2\pi}{\omega} \right|$.

(4) 单调性：① $A\omega > 0$ ，增区间： $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)；

减区间： $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) .

② $A\omega < 0$ ，增区间： $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)；

减区间： $2k\pi - \frac{\pi}{2} < \omega x + \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

(5) 对称性：对称轴 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 对称中心 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

1. 和角公式与差角公式

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$(3) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right)$$

变形式 $\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta) \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right)$.

2. 二倍角公式

$$(1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

变形式 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \text{变形式 } \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} .$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} .$$

3. 辅助角公式

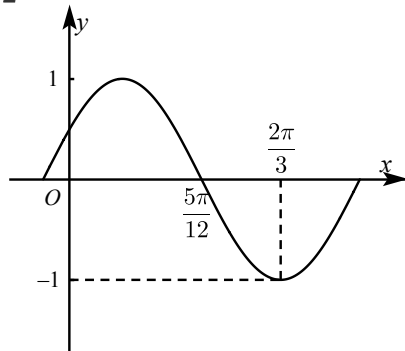
$$y = a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) ,$$

其中 φ 所在的象限由 a, b 的符号确定, φ 角的值由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 确定 .

4. “1”的代换技巧

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha; 1 = 2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha, 1 = \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha, 1 = \tan^2 \frac{\pi}{4} .$$

19. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 部分图象如图所示 .



(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式 .

(2)

将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象. 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

【答案】 (1) π , $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) $1, -\frac{1}{2}$.

【解析】 (1) 由图可知, $A = 1$, $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore T = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } f(x) = -1,$$

$$\therefore \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = -1,$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 由(1)知 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到:

$$y = g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right],$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \text{当 } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } g(x) \text{ 有最大值为 } 1,$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \text{ 时, } g(x) \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值; 求固定区间正弦型函数值域; 正弦函数的图象和性质; 正余弦型、正切型函数图象变换

20. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin^2 x + \sin x \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的零点;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

【答案】 (1) π 或 $\frac{5\pi}{6}$

(2) $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

最小值为 $-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 (1) 令 $f(x) = 0$. 得 $\sin x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$, 所以 $\sin x = 0$ 或 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

由 $\sin x = 0$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 得 $x = \pi$,

由 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 得 $x = \frac{5\pi}{6}$,

综上, 函数 $f(x)$ 的零点为 π 或 $\frac{5\pi}{6}$.

(2) 化简 $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + \sin x \cos x$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

得 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$,

当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 即 $x = \frac{11\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】函数的零点

21. 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 函数图像的对称轴方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(3) 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值, 最小值.

【答案】 (1) 函数图像的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

(2) $f(x)$ 的单调增区间为 $x \in [-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$;

(3) $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 $-\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x - 2 = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

(2) $\because f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$,

$\therefore$ 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 得:

$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为: $[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}], k \in \mathbf{Z}$.

(3) $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, 所以

$f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, 1]$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 $-\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】求固定区间正弦型函数值域; 求正弦型函数的单调区间

22. 已知函数 $f(x) = 4\sin^2 x + 2\sin 2x - 2, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 取得最大值时 x 的集合;

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称.

【答案】 (1) $\pi, x \in \{x | x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because f(x) = 4\sin^2 x + 2\sin 2x - 2$

$$= 2(1 - \cos 2x) + 2\sin 2x - 2$$

$$= 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}),$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$.

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

即 $x \in \{x | x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\}$ 时, $f(x)$ 取得最大值.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})$,

则其图象的对称轴为直线

$$2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } x = -\frac{\pi}{8},$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称.

【标注】【知识点】二倍角的正弦; 正弦函数的图象和性质

23. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x + a$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值的和为 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

【答案】 (1) $T = \pi$. 单调递减区间是 $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $a = 0$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + a = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + a + \frac{1}{2}$.

所以 $T = \pi$.

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$,
 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$.
 所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$.
 因为函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最大值与最小值的和
 $(1 + a + \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2} + a + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$,
 所以 $a = 0$.

【标注】【知识点】二倍角公式化简求值综合运用；求固定区间正弦型函数值域

24. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 且 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 若函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$, 求 $f(B)$ 的最大值.

【答案】 最大值是 $\frac{3}{2}$.

【解析】 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$,
 $\because A = \frac{\pi}{3} \therefore B \in (0, \frac{2\pi}{3}) \therefore \frac{\pi}{6} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$
 $\therefore$ 当 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(B)$ 有最大值是 $\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】辅助角公式；求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质

25. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2}$ 其中 $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间.

【答案】 (1) 值域为 $[-3, 1]$.

(2) 单调增区间为 $[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

【解析】 (1) $f(x) = \sin \omega x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \omega x \times \frac{1}{2} + \sin \omega x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \omega x \times \frac{1}{2} - (1 + \cos \omega x)$
 $= \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x - 1 = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - 1$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3, 1]$

(2) 由 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, 得 $\omega = 2$

所以 $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

得 $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【标注】【知识点】求单调区间

【知识点】用图象法求值域

【素养】数学运算

26. 已知：向量 $\vec{a} = (2\cos\frac{x}{4}, 2\sin\frac{x}{4})$, $\vec{b} = (\sin\frac{x}{4}, -\sqrt{3}\sin\frac{x}{4})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期及最值；

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍后，再向左平移 $\frac{2}{3}\pi$ 得到函数 $y = g(x)$, 判断函数 $y = g(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

【答案】(1) 最小正周期为 4π , 最小值为 -2 .

(2) 偶函数，理由见解析.

【解析】(1) ∵ 函数

$$y = f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \sqrt{3} = \sin\frac{x}{2} - 2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{4} + \sqrt{3} = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

故函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 最小值为 -2 .

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍后，

得到函数 $y = 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，再向左平移 $\frac{2}{3}\pi$

得到函数 $y = 2\sin\left[\frac{1}{4}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{4}$ 的图像，

故函数 $y = g(x) = 2\cos\frac{x}{4}$, 定义域为 $\mathbf{R}$,

因为 $g(-x) = 2\cos\left(-\frac{x}{4}\right) = 2\cos\frac{x}{4} = g(x)$,

故函数 $y = g(x)$ 是偶函数.

【标注】【知识点】正余弦型、正切型函数图象变换；求固定区间正弦型函数值域

27. 已知函数 $f(x) = \sin^2\omega x + \sqrt{3}\sin\omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围.

【答案】(1) 1.

(2) $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

【解析】(1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x + \frac{1}{2} = \sin \left(2\omega x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，且 $\omega > 0$ ，所以 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$ ，解得 $\omega = 1$ 。

(2) 由(1)得 $f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$ 。

因为 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ，所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ ，

因此 $0 \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ ，即 $f(x)$ 的取值范围为 $\left[0, \frac{3}{2} \right]$ 。

【标注】【知识点】二倍角的正弦；二倍角的余弦；求固定区间正弦型函数值域

28. 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 x$

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期。

(2) 设函数 $g(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，有 $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$ ，且当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$ ，求 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的解析式。

【答案】(1) $T = \pi$ 。

(2) $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sin 2x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \frac{1}{2} \sin 2x, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ 。

【解析】(1) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 x$ ，
 $= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x$
 函数的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时 $g(x) = \frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ 。

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时，

$x + \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $g(x) = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sin 2x$ 。

当 $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时， $x + \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

$g(x) = g(x + \pi) = \frac{1}{2} \sin 2(x + \pi) = \frac{1}{2} \sin 2x$ 。

$g(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的解析式： $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sin 2x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ \frac{1}{2} \sin 2x, & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ 。

【标注】【知识点】已知正弦型函数性质求解析式；倍角、和差角公式综合

29. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 2x - 1$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间。

(2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值，并求出取得最值时的 x 值。

【答案】(1) $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$.

(2) $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数取得最小值为 -3 .

$x = 0$ 时, 函数取得最大值为 $\sqrt{3} - 1$.

【解析】(1) 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x - 1$
 $= \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x - 1 = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x - 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 求得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$, 可得函数的增区间为

$\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$.

(2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数

$g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ 的图象,

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 故当 $2x + \frac{\pi}{6} = \pi$ 时, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数取得最小值为 $-2 - 1 = -3$.

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 时, 即 $x = 0$ 时, 函数取得最大值为 $\sqrt{3} - 1$.

【标注】【知识点】求正弦型函数的单调区间; 求固定区间正弦型函数值域

30. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和值域.

(2) 若 $x = x_0 (x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}])$ 为 $f(x)$ 的一个零点, 求 $\sin 2x_0$ 的值.

【答案】(1) 最小正周期 $T = \pi$, 值域为: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

(2) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$.

【解析】(1) 函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R}$

化简可得: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$

$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + \frac{1}{2}$

$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 值域为: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

(2) 令 $f(x_0) = 0$, 可得 $\sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} < 0$.

$$\begin{aligned} \because x_0 &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \therefore 2x_0 - \frac{\pi}{6} &\in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right], \\ \cos\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{15}}{4}. \end{aligned}$$

那么：

$$\sin 2x_0 = \sin \left[\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \right] = \sin \left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \cos \left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$

【标注】【知识点】倍角、和差角公式综合；求固定区间正弦型函数值域