

02解不等式组及不等式性质练习册

1. 求解不等式组

不等式组

1. 解不等式组：
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 < 0 \\ \frac{x+1}{x} > 1 \end{cases}.$$

【答案】 $(0, 2)$.

【解析】 原不等式组可化为
$$\begin{cases} (x+5)(x-2) < 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} -5 < x < 2 \\ x > 0 \end{cases},$$

从而有 $0 < x < 2$,

所以, 原不等式的解集为 $(0, 2)$.

【标注】【知识点】分式不等式; 一元二次不等式

2. 不等式组
$$\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$$
的解集为().

A. $\{x | -1 < x < 0\}$

B. $\{x | -2 < x < -1\}$

C. $\{x | 0 < x < 1\}$

D. $\{x | x > 1\}$

【答案】 C

【解析】 由 $x(x+2) > 0$, 得 $x > 0$ 或 $x < -2$. 又由 $|x| < 1$, 得 $-1 < x < 1$,

所以不等式组
$$\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$$
的解集为 $\{x | 0 < x < 1\}$.

故选C.

【标注】【知识点】一元二次不等式; 含绝对值的不等式

3. 解不等式组：
$$\begin{cases} \frac{1}{x} < 1 \\ |x^2 - 3x| > 4 \end{cases}.$$

【答案】 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$.

【解析】 ① $\frac{1}{x} < 1$, 即 $x < 0$ 或 $x > 1$;

② $|x^2 - 3x| > 4$,

若 $x^2 - 3x \leq 0$, 即 $0 \leq x \leq 3$ 时 ,
 $|x^2 - 3x| = 3x - x^2 > 4$,
 即 $x^2 - 3x + 4 < 0$ 无解 ;
 若 $x^2 - 3x > 0$, 即 $x < 0$ 或 $x > 3$,
 $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x > 4$,
 $x^2 - 3x - 4 > 0$,
 $x < -1$ 或 $x > 4$,
 $\therefore x < -1$ 或 $x > 4$,
 综上 : $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$.

【标注】【知识点】一元二次不等式；分式不等式；含绝对值的不等式

4. 解不等式组 :
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+3} > 1 \\ |x-2| > 3 \end{cases}$$

【答案】 $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.

【解析】 由 $\frac{2x-1}{x+3} > 1$,
 $\frac{2x-1-x-3}{x+3} > 0$,
 $\frac{x-4}{x+3} > 0$,
 $(x-4)(x+3) > 0$,
 $x > 4$ 或 $x < -3$,
 由 $|x-2| > 3$,
 $(x-2)^2 > 9$,
 $x^2 + 4 - 4x > 9$,
 $(x-5)(x+1) > 0$,
 $x > 5$ 或 $x < -1$.
 综上所述 , 不等式组的解集为 $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

连不等式

5. 求出下列不等式的解集 :

$$10 \leq x^2 - 3x + 6 < 24 \text{ _____} ;$$

【答案】 (1) $(-3, -1] \cup [4, 6)$

【解析】(1) $\begin{cases} x^2 - 3x + 6 < 24 \\ 10 \leq x^2 - 3x + 6 \end{cases}$
 $\therefore \begin{cases} (x-6)(x+3) < 0 \\ (x-4)(x+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3, -1] \cup [4, 6)$.
 故答案为: $(-3, -1] \cup [4, 6)$.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

6. 解不等式 $2 \leq x^2 - 2x < 8$.

【答案】 $\{x | -2 < x \leq 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } 1 + \sqrt{3} \leq x < 4\}$.

【解析】原不等式等价于 $\begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geq 0 \text{ ①} \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \text{ ②} \end{cases}$,
 由①得 $x \leq 1 - \sqrt{3}$ 或 $x \geq 1 + \sqrt{3}$,
 由②得 $-2 < x < 4$,
 $\therefore -2 < x \leq 1 - \sqrt{3}$ 或 $1 + \sqrt{3} \leq x < 4$,
 $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | -2 < x \leq 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } 1 + \sqrt{3} \leq x < 4\}$.

【标注】【知识点】一元二次不等式

7. 解下列不等式.

$$1 < |3x - 2| < 4.$$

【答案】(1) $\{x | -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3} \text{ 或 } 1 < x < 2\}$.

【解析】(1) 由原不等式得 $-4 < 3x - 2 < -1$ 或 $1 < 3x - 2 < 4$,
 $\therefore -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$ 或 $1 < x < 2$, 不等式的解集为 $\{x | -\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3} \text{ 或 } 1 < x < 2\}$.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

2. 不等式性质

8. 已知 $a \in \mathbf{R}$, $p = (a-1)(a-3)$, $q = (a-2)^2$, 则 p 与 q 的大小关系为()

- A. $p > q$ B. $p \leq q$ C. $p < q$ D. $p \geq q$

【答案】C

【解析】解: $p = a^2 - 4a + 3$, $q = a^2 - 4a + 4$,
 则 $p - q = a^2 - 4a + 3 - (a^2 - 4a + 4)$
 $= 3 - 4 = -1 < 0$,

即 $p < q$,

故选: C.

【标注】【知识点】不等式的性质

9. 已知 $-1 \leq x + y \leq 4$ 且 $2 \leq x - y \leq 3$, 则 $z = 2x - 3y$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $[3, 8]$

【解析】方法一: $\because z = -\frac{1}{2}(x + y) + \frac{5}{2}(x - y)$.

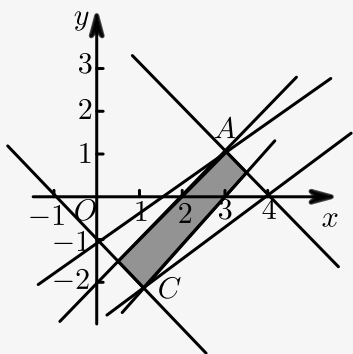
$$3 \leq -\frac{1}{2}(x + y) + \frac{5}{2}(x - y) \leq 8,$$

$$\therefore z \in [3, 8].$$

方法二: 由 $z = 2x - 3y$ 得

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3},$$

作出不等式组对应的平面区域如图(阴影部分 ABC):



平移直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3}$, 由图象可知当直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3}$ 过点 $C(1, -2)$ 时, 直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3}$ 截距最小, 此时 z 最大, 代入目标函数 $z = 2x - 3y$,

$$\text{得 } z = 2 \times 1 - 3 \times (-2) = 8.$$

当直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3}$ 过点 $A(3, 1)$ 时, 直线 $y = \frac{2}{3}x - \frac{z}{3}$ 截距最大, 此时 z 最小,

$$\text{代入目标函数 } z = 2 \times 3 - 3 = 3,$$

$$\therefore z \in [3, 8].$$

故答案为: $[3, 8]$.

【标注】【知识点】截距型目标函数

10. “ $a + c > b + d$ ”是“ $a > b$ 且 $c > d$ ”的 ().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】若 $a > b$ 且 $c > d$,

则 $a + c > b + d$,

若 $a + c > b + d$,

可令 $a = 100, c = 0, b = 1, d = 1$ 与 $c > d$ 矛盾.

故选 B.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

11. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ().

A. $a + c > b - c$

B. $ac > bc$

C. $\frac{c^2}{a-b} > 0$

D. $(a-b)c^2 \geq 0$

【答案】D

【解析】A 选项：当 $a = -1, b = -2, c = -3$ 时, $a + c = -4, b - c = 1$, 显然不成立, 本选项不一定成立;

B 选项： $c = 0$ 时, $ac = bc$, 本选项不一定成立;

C 选项： $c = 0$ 时, $\frac{c^2}{a-b} = 0$, 本选项不一定成立;

D 选项： $\because a - b > 0, \therefore (a-b)^2 > 0$, 又 $c^2 \geq 0, \therefore (a-b)^2 c \geq 0$, 本选项一定成立.
故选 D.

【标注】【知识点】针对不等式变形判断正误

12. 下列四个不等式：① $a < 0 < b$ ② $b < a < 0$ ③ $b < 0 < a$ ④ $0 < b < a$, 能使 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的个数有 ().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】(1) $\because a < 0 < b$,

$\therefore \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$, 故 (1) 对;

(2) $\because b < a < 0$,

$\therefore ab > 0$,

$\therefore \frac{b}{ab} < \frac{a}{ab}$,

$\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 (2) 正确;

(3) $\because b < 0 < a$,

$\therefore \frac{1}{b} < 0 < \frac{1}{a}$, 故 (3) 错误;

$$(4) \because 0 < b < a,$$

$$\therefore ab > 0,$$

$$\therefore \frac{b}{ab} < \frac{a}{ab},$$

$$\therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \text{ 故 (4) 正确;}$$

成立的共3个.

故选C.

【标注】【知识点】针对不等式变形判断正误

13. 若 a, b, c 为实数, 下列结论正确的是().

A. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$

B. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$

C. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$

【答案】 D

【解析】 对于A. 若 $a > 0, b, c, d$ 均小于0, 则不正确;

对于B. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > b^2$, 则 $\frac{a^2}{ab} > \frac{b^2}{ab}$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$, 故B不正确;

对于C. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, 即 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, 故C不正确;

对于D. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$, 正确.

故选D.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】针对不等式变形判断正误

14. 下列命题为真命题的是().

A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$

C. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab$

D. 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

【答案】 B

【解析】 A选项: 若 $a > b > 0, c = 0$ 则 $ac^2 = bc^2$, 故A错误;

B选项: 由 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, $a > b > 0, \therefore a^2 > b^2$,
故B正确;

C 选项：若 $a < b < 0$ ，则 $a^2 > ab$ ，故 C 错误；

D 选项：若 $a < b < 0$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故 D 错误．

故选 B．

【标注】【知识点】针对不等式变形判断正误

3. 含参不等式的分类讨论