

01求解不等式（计算）练习题

1. 一元二次不等式

 可因式分解

1. 解一元二次不等式： $-x^2 + 3x + 4 < 0$.

【答案】 $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

【解析】 $\because -x^2 + 3x + 4 < 0$,
 $\therefore x^2 - 3x - 4 > 0$,
 $\therefore (x - 4)(x + 1) > 0$,
 $\therefore x > 4$ 或 $x < -1$,
综上所述，不等式的解集是 $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

【标注】 【知识点】一元二次不等式

2. 解不等式： $x - 5\sqrt{x} + 6 > 0$

【答案】 $[0, 4) \cup (9, +\infty)$

【解析】 $\because x - 5\sqrt{x} + 6 > 0$,
 $\therefore (\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 6 > 0$,
 $\therefore (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3) > 0$,
 $\therefore \sqrt{x} > 3$ 或 $\sqrt{x} < 2$,
 $\therefore x > 9$ 或 $0 \leq x < 4$,
即不等式的解集为 $[0, 4) \cup (9, +\infty)$

【标注】 【知识点】无理不等式

 完全平方

3. 解下列不等式： $x^2 - 4x + 4 > 0$.

【答案】 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 2\}$.

【解析】 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$, 方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 有等根 $x_1 = x_2 = 2$, $\therefore$ 原不等式的解集为： $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 2\}$.

【标注】【知识点】一元二次不等式

不可因式分解

2. 分式不等式

直接分式化整式

4. 如何解不等式 $\frac{x+1}{3x-2} > 0$.

【答案】 $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > \frac{2}{3}\}$

【标注】【知识点】分式不等式

5. 不等式 $\frac{x}{x+1} \leq 0$ 的解集为 _____ .

【答案】 $(-1, 0]$

【解析】 $\because \frac{x}{x+1} \leq 0$,
 $\therefore \begin{cases} x(x+1) \leq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$,
 $\therefore -1 < x \leq 0$.

【标注】【知识点】分式不等式

【素养】数学运算

需要移项通分

6. 不等式 $\frac{x-1}{x+2} > 1$ 的解集是 _____ .

【答案】 $(-\infty, -2)$

【解析】 解法一：原不等式等价于

$$\frac{x-1}{x+2} - 1 = \frac{x-1-(x+2)}{x+2} = \frac{-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2 .$$

解法二：不等式两边同时乘以 $(x+2)^2$, 得到 $(x-1)(x+2) > (x+2)^2$, 展开整理化简后解一元一次不等式 .

【标注】【知识点】一元二次不等式

7. 不等式 $\frac{1}{x-1} \geq -2$ 的解集为 _____ .

【答案】 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$

【解析】 $\because \frac{1}{x-1} \geq -2$,
则 $\frac{1}{x-1} + 2 \geq 0$,
则 $\frac{2x-1}{x-1} \geq 0$,
 $\therefore x \leq \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$,
故不等式 $\frac{1}{x-1} \geq -2$ 的解集为: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】分式不等式

3. 绝对值不等式

公式法

8. 不等式 $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$ 的解集为 ().

- A. $\{x|0 < x < 1\} \cup \{x|x > 1\}$
- B. $\{x|0 < x < 1\}$
- C. $\{x|-1 < x < 0\}$
- D. $\{x|x < 0\}$

【答案】 D

【解析】 $\because \left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$,
 $\therefore |x+1| < |x-1|$,
 $\therefore x^2 + 2x + 1 < x^2 - 2x + 1$.
 $\therefore x < 0$.
 $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|x < 0\}$.
故选D.

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

平方法

9. 解下列绝对值不等式.

$$2|x| > |x-1|.$$

【答案】 (1) $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}$.

【解析】(1) 两边平方得 $4x^2 > (x-1)^2$ ，移项得 $(x+1)(3x-1) > 0$ ，解得 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}$ 。

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

分情况讨论法

10. 关于 x 的不等式 $|x| + |x-1| \geq 3$ 的解集是 ()。

- A. $(-\infty, -1]$
- B. $[2, +\infty)$
- C. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$
- D. $[-1, 2]$

【答案】C

【解析】方法一：当 $x \geq 1$ 时， $x + x - 1 \geq 3$ ，解得： $x \geq 2$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $x + 1 - x \geq 3$ ，不成立，

当 $x \leq 0$ 时， $-x + 1 - x \geq 3$ ，解得： $x \leq -1$ ，

综上，不等式的解集是 $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ ，

故选C。

方法二：根据绝对值的几何意义知，原不等式的解集是

$(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ ；

故选C。

【标注】【知识点】含绝对值的不等式

4. 高次不等式

整式型——已因式分解

11. 不等式 $(3x+1)(x+1)(x-3) < 0$ 的解集为 _____。

【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (-1, 3)$

【解析】 $3x+1=0$ ，

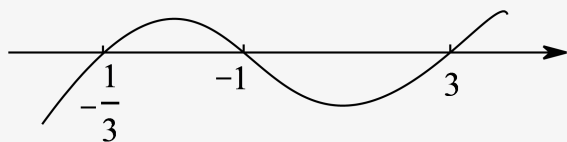
$$\therefore x = -\frac{1}{3}, x+1=0,$$

$$\therefore x = -1, x-3=0,$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore x < -\frac{1}{3} \text{ 时, } 3x+1 < 0, x+1 < 0, x-3 < 0.$$

∴由图可知：



解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-1, 3)$.

【标注】【方法】穿根法

【素养】数学运算

【知识点】高次不等式

【知识点】区间表示法

【知识点】描述法

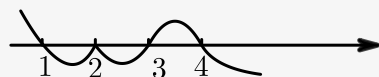
【思想】方程思想

12. 写出下列不等式（组）的解集：

$$(x-1)(2-x)^2(x-3)(4-x)^3 \geq 0 \text{ ______ .}$$

【答案】（1） $(-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4]$

【解析】（1）



【标注】【知识点】高次不等式；分式不等式；含绝对值的不等式

🔗 整式型——未因式分解

🔗 分式型——已因式分解

13. 请回答下列各题：

$$\text{不等式 } \frac{(x-1)^3(x+2)(x-3)}{x-1} \leq 0 \text{ 的解集为 ______ .}$$

【答案】（1） $[-2, 1) \cup (1, 3]$

【标注】【素养】数学运算

🔗 分式型——未因式分解

$$14. \text{ 不等式 } \frac{x-2}{x^2+3x+2} > 0 \text{ 的解集是 ______ .}$$

【答案】 $\{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$

【解析】 由 $\frac{x-2}{x^2+3x+2} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{(x+1)(x+2)} > 0 \Rightarrow (x+1)(x+2)(x-2) > 0$ ，故原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

【标注】 【知识点】 高次不等式

5. 无理不等式

🔔 根号式大于或大于等于右侧式

15. 解不等式： $\sqrt{-x^2+3x-2} > 4-3x$

【答案】 $\left\{x \mid \frac{6}{5} < x \leq 2\right\}$ 。

【解析】 原不等式等价于下列两个不等式组得解集的并集：①：
$$\begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ -x^2+3x-2 \geq 0 \\ -x^2+3x-2 > (4-3x)^2 \end{cases},$$
②：
$$\begin{cases} -x^2+3x-2 \geq 0 \\ 4-3x < 0 \end{cases}.$$
解①：
$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{6}{5} < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{5} < x \leq \frac{4}{3},$$
解②：
$$\frac{4}{3} < x \leq 2.$$
原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{6}{5} < x \leq 2\right\}$

【标注】 【知识点】 解不等式中的分类讨论；无理不等式

🔔 根号式小于或小于等于右侧式

16. 不等式 $\sqrt{4x-x^2} < x$ 的解集是 ()。

- A. $(0, 2)$
- B. $(2, +\infty)$
- C. $(2, 4]$
- D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】 C

【解析】 不等式化为
$$\begin{cases} 4x-x^2 > 0 \\ x > 0 \\ 4x-x^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x > 0 \\ x > 2 \text{ 或 } x < 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 4.$$
故选C。

【标注】 【知识点】 无理不等式

两边根号式

17. 解下列不等式：

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{3 - x}.$$

【答案】 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3]$.

【解析】 原不等式等价于

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 > 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x > \sqrt{2} \text{ 或 } x < -\sqrt{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3]$.

【标注】 【知识点】 无理不等式

平方法

18. 不等式 $\sqrt{2x+1} > \sqrt{x+1} - 1$ 的解是 ().

A. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【答案】 A

【解析】 由不等式 $\sqrt{2x+1} > \sqrt{x+1} - 1$, 可得 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} + 1 > \sqrt{x+1} \end{cases}$,
 $\therefore \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x+1+2\sqrt{2x+1}+1 > x+1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{2x+1} > -x-1 \end{cases}$ ①.
由于当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, $-x-1 < 0$, $2\sqrt{2x+1} > -x-1$ 恒成立,
解得①的解为 $x \geq -\frac{1}{2}$.
故选A.

【标注】 【知识点】 无理不等式