

02指数运算与指数函数练习题

1. 指数运算

1. 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第17题10分 ★★

计算：

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-7.8)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

【答案】(1) $\frac{1}{2}$.

【解析】(1) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-7.8)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
 $= \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
 $= \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times \frac{1}{2}} - 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
 $= \frac{3}{2} - 1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$
 $= \frac{1}{2}.$

【标注】【知识点】实数指数幂运算

2. 2019~2020学年天津河东区高一上学期期中第16题8分 ★★

计算： $16^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-0.25} - \left(-\frac{1}{2}\right)^0.$

【答案】(1) 6.

【解析】(1) 原式 $= 4 + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1$
 $= 4 + 3 - 1$
 $= 6.$

【标注】【知识点】实数指数幂运算

3. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第16题 ★★

化简：

$$\frac{(\sqrt[3]{a^2b})^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}} (a > 0, b > 0).$$

【答案】(1) $\frac{a}{b}.$

【解析】(1)
$$\frac{(\sqrt[3]{a^2b})^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a^2b^4}}$$
$$= \frac{a\sqrt[3]{a^2b^2}}{b\sqrt[3]{a^2b^2}}$$
$$= \frac{a}{b} (a > 0, b > 0).$$

【标注】【知识点】实数指数幂运算

4. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第3题4分 ★

若 $a < \frac{1}{4}$ ，则化简 $\sqrt[4]{(4a-1)^2}$ 的结果是 () .

- A. $-\sqrt{4a-1}$ B. $-\sqrt{1-4a}$ C. $\sqrt{4a-1}$ D. $\sqrt{1-4a}$

【答案】D

【解析】若 $a < \frac{1}{4}$ ，则 $4a-1 < 0$ ，
所以 $\sqrt[4]{(4a-1)^2} = \sqrt{1-4a}$.
故选 D .

【标注】【知识点】实数指数幂运算

2. 指数函数

🗯 比较大小

5. 2019~2020学年天津宁河县高一上学期期中第8题4分 ★★

已知 $a = \left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$ ， $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}$ ， $c = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.3}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

【答案】D

【解析】由题意可知： $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3} < \left(\frac{2}{5}\right)^{0.3} < 1$ ， $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3} < 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.3}$.
故 $b < a < c$.
故选：D .

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质；用单调性比较大小

6. 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第3题3分 ★

设 $a = 0.6^{0.6}$ ， $b = 0.6^{1.5}$ ， $c = 1.5^{0.6}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 () .

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

【答案】 C

【解析】 函数 $y = 0.6^x$ 为减函数；

$$\text{故 } a = 0.6^{0.6} > b = 0.6^{1.5},$$

函数 $y = x^{0.6}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

$$\text{故 } a = 0.6^{0.6} < c = 1.5^{0.6},$$

$$\text{故 } b < a < c,$$

故选：C.

【标注】 【知识点】 幂值比大小

7. 2020~2021学年天津河东区高一上学期期中第12题4分 ★★

设 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. 则 a, b, c 的大小关系是 _____.

【答案】 $c > a > b$

【解析】 $\because \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\because x^{\frac{3}{4}}$ 为增函数，

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$\therefore c > a > b.$$

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小

8. 2019~2020学年天津河西区高一上学期期中第6题3分 ★

设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4}$, $c = \left(\frac{5}{3}\right)^{0.4}$, 则 ().

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $a < c < b$

【答案】 A

【解析】 由指数函数得：

$$0 < \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5} < 1,$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{0.4} > \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4} > 1,$$

$$\therefore c > b > a.$$

故选 A.

【标注】【知识点】指对幂比较大小；实数指数幂运算；指数函数的图象及性质
【素养】数学运算

 过定点

9. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第9题4分 ★★

函数 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必经过定点 _____ .

【答案】 (1, 2)

【解析】 令 $x - 1 = 0$, 解得 $x = 1$,

此时 $y = a^0 + 1 = 2$, 故得 (1, 2) ,

此点与底数 a 的取值无关 ,

故函数 $y = a^{x-1} + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象必经过定点 (1, 2) .

故答案为 : (1, 2) .

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质

10. 2017~2018学年天津南开区天津市崇化中学高一上学期期中第12题4分 ★

函数 $y = a^{2x-3} + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点 _____ .

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

【解析】 由 $2x - 3 = 0$, 得 $x = \frac{3}{2}$,

此时 $y = a^{2x-3} + 1 = a^0 + 1 = 2$,

$\therefore$ 函数 $y = a^{2x-3} + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

【标注】【知识点】实数指数幂运算

 解不等式

11. 2019年天津高三一模文科十二重点中学毕业班联考(一)第2题5分 ★

设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $2^x < \frac{1}{8}$ ”是“ $\frac{2}{x} < 1$ ”的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

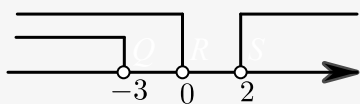
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $p: 2^x < \frac{1}{8} \Rightarrow x < -3$,

$q: \frac{2}{x} < 1 \Rightarrow x > 2 \text{ 或 } x < 0$.



故选 A.

【标注】【知识点】指数方程和指数不等式

12. 2020~2021学年安徽合肥瑶海区合肥市第十一中学高一上学期期中第15题5分 ★★★

设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ____.

【答案】 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

【解析】 解: ①当 $x_0 \leq 0$ 时, 可得 $2^{-x_0} - 1 > 1$, 即 $2^{-x_0} > 2$, 所以 $-x_0 > 1$, 得 $x_0 < -1$;

②当 $x_0 > 0$ 时, $x_0^{\frac{1}{2}} > 1$, 可得 $x_0 > 1$.

故答案为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】指数方程和指数不等式

🔗 实际应用

13. 2017~2018学年黑龙江哈尔滨南岗区哈尔滨市第三十二中学高一上学期期中第13题4分 ★

某种细菌在培养过程中, 每 20 min 分裂一次, 由 1 个细菌分裂成 2 个细菌, 经过 3h, 这种细菌由 1 个可繁殖成 ____ 个.

【答案】 512

【解析】 由题意可得 $y = 2^{3x}$,

当 $x = 3$ 时, 可得 $y = 2^9 = 512$.

故答案为: 512.

【标注】【知识点】指数函数模型

14. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第6题3分 ★

某林区 2010 年初木材蓄积量约为 200 万立方米, 由于采取了封山育林、严禁采伐等措施, 使木材蓄积量的年平均增长率达到了 5% 左右, 则 2015 年初该林区木材蓄积量约为 () 万立方米.

A. $200(1+5\%)^5$ B. $200(1+5\%)^6$ C. $200(1+6 \times 5\%)$ D. $200(1+5 \times 5\%)$

【答案】 A

【解析】 由题意，2010年初该林区木材蓄积量约为200万立方米，
2011年初该林区木材蓄积量约为 $200 + 200 \cdot 5\% = 200(1 + 5\%)$ 万立方米，
2012年初该林区木材蓄积量约为 $200(1 + 5\%)^2$ 万立方米，
2013年初该林区木材蓄积量约为 $200(1 + 5\%)^3$ 万立方米，
2014年初该林区木材蓄积量约为 $200(1 + 5\%)^4$ 万立方米，
2015年初该林区木材蓄积量约为 $200(1 + 5\%)^5$ 万立方米．故 A 正确；
故选 A．

【标注】 【知识点】 实数指数幂运算

15. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第8题4分 ★★

某食品的保鲜时间 y (单位：小时) 与储藏温度 x (单位： $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数， k, b 为常数)．若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是 () ．

- A. 16小时 B. 20小时 C. 24小时 D. 28小时

【答案】 C

【解析】 将 $x = 0, y = 192$ ； $x = 22, y = 48$ 代入函数表达式得：

$$192 = e^b, 48 = e^{22k+b},$$

$$\text{两式相除可得 } e^{22k} = \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } x = 33 \text{ 时, } y = e^{33k+b} = e^{11k} \cdot e^{22k+b} = \sqrt{\frac{1}{4}} 48 = 24,$$

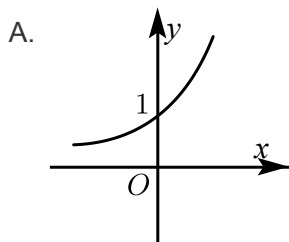
故选 C．

【标注】 【知识点】 用直接带入法求解析式；指数函数的图象及性质

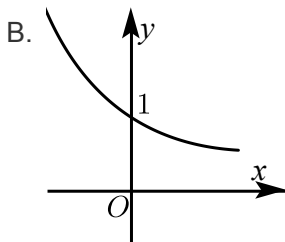
📊 图像

16. 2020~2021学年天津河北区天津市第七十八中学高一上学期期中第9题 ★

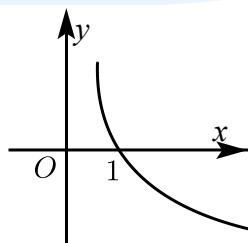
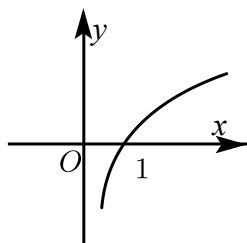
函数 $y = 3^{-x}$ 的图象是 () ．



C.



D.



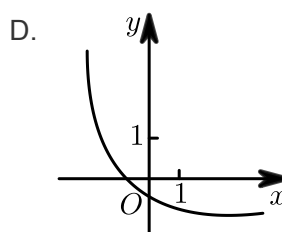
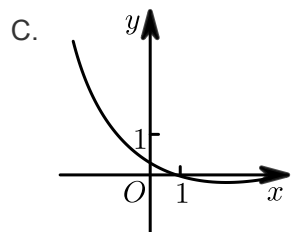
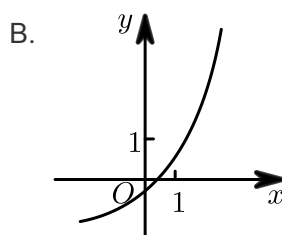
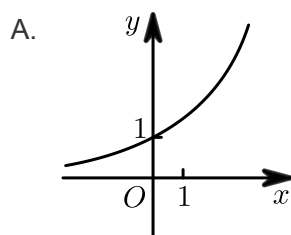
【答案】 B

【解析】 $\because y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,
 $\therefore$ 函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为减函数且过点 $(0, 1)$,
 则其图象如选项 B 所示 ,
 故选 B .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

17. 2018~2019学年辽宁沈阳皇姑区辽宁省实验中学高一上学期期末第9题 ★

函数 $f(x) = a^x - a (a > 0, a \neq 1)$ 的图象可能是 () .



【答案】 C

【解析】 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x - a$ 为减函数 ,
 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x - a$ 为增函数 ,
 且图象过 $(1, 0)$ 点 .
 故选 C .

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质 ; 平移变换问题 ; 函数图象的识别问题 ; 图象法

18. 2018~2019学年北京海淀区首都师范大学第二附属中学高一上学期期中第8题3分 ★★

函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 3 - 3a, & x < 0 \\ a^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, 1)$ B. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

【答案】 B

【解析】 根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} -x + 3 - 3a, & x < 0 \\ a^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 必有 $\begin{cases} 3 - 3a \geq 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$, 解可得: $0 < a \leq \frac{2}{3}$, 即 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{2}{3}\right]$.

故选 B.

【标注】 【知识点】 利用四则运算判断函数单调性

【知识点】 函数的值域

【知识点】 已知定义域求参数的取值范围

【知识点】 函数的定义

【知识点】 分段函数

【知识点】 函数求值问题

【知识点】 解析法

【知识点】 指数函数的图象及性质

【知识点】 利用指数函数性质求最值

【思想】 数形结合思想

【素养】 数学运算

【素养】 数学抽象

复合函数单调性

19. 2017~2018学年广东广州黄埔区广州市第二中学科学城校区高一上学期期中第7题5分 ★★

函数 $y = 2^{x^2 - 2x}$ 的单调递减区间是 ().

- A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 0]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 令 $t = x^2 - 2x$, 则 $y = 2^t$, $t \in [-1, +\infty)$.

而 $t = x^2 - 2x$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 1]$, $y = 2^t$ 在 $t \in [-1, +\infty)$ 上是增函数,

所以函数 $y = 2^{x^2 - 2x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 1]$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性

20. 2017~2018学年浙江金华东阳市东阳中学高一上学期期中第2题4分 ★

函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ 的单调增区间是 () .

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

【答案】 A

【解析】 $\because t = 1 - x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数 ,

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数 ,

$\therefore$ 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ 单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$.

故选 : A .

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性 ; 指数函数的图象及性质

21. 2016~2017学年湖北黄冈黄州区湖北省黄冈中学高一上学期期末理科第14题5分 ★★

函数 $f(x) = a^{-x^2+3x+2}$ ($0 < a < 1$) 的单调递增区间是 _____ .

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

【解析】 令 $t = -x^2 + 3x + 2$, 则 $f(x) = a^t$,

$\because 0 < a < 1$,

故本题即求函数 t 的减区间 , 再利用二次函数的性质可得 t 的减区间为 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

故答案为 : $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

【标注】 【知识点】 判断复合函数单调性

💡 复合函数的值域

22. 2019~2020学年广东广州越秀区广州市培正中学高一上学期期中第20题12分 ★★★

设 a 为常数 , 函数 $f(x) = 1 + 2^x + a \cdot 4^x$, $x \in (-\infty, 1]$.

(1) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时 , 求 $f(x)$ 的值域 .

(2) 若 $f(x)$ 的值域 $\subseteq [0, +\infty)$, 求 a 的最小值 .

【答案】 (1) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

(2) $-\frac{3}{4}$.

【解析】 (1) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时 , $f(x) = 1 + 2^x - \frac{1}{2} \cdot 4^x$, $x \in (-\infty, 1]$,

令 $t = 2^x$, 则 $t \in (0, 2]$,

$$\text{此时 } y = f(x) = -\frac{t^2}{2} + t + 1 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{3}{2},$$

$\because t \in (0, 2]$, 则 $(t-1)^2 \in [0, 1]$,

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{3}{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

$\therefore f(x)$ 值域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

故答案为: $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

(2) $\because f(x)$ 的值域 $\in [0, +\infty]$,

$$\therefore y = at^2 + t + 1 \geq 0, \text{ 在 } t \in (0, 2] \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } a \geq \frac{-t-1}{t^2} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{又 } \because \text{当 } t \in (0, 2] \text{ 时, } -\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = -\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right],$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4} \text{ 恒成立, 即 } a \text{ 的最小值为 } -\frac{3}{4}.$$

故答案为: $-\frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】定轴定区间求值域；不等式中的恒成立与能成立问题

结合函数性质

23. 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第13题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \frac{2^x - m}{2^x + m}$ ($m > 0$) 是奇函数, 则 $f(m) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 由函数 $f(x) = \frac{2^x - m}{2^x + m}$ 是奇函数可知,

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - m}{2^{-x} + m} = \frac{1 - m \cdot 2^x}{1 + m \cdot 2^x} = -f(x) = \frac{m - 2^x}{m + 2^x} \text{ 恒成立,}$$

解得 $m = 1$ 或 $m = -1$ (舍去),

$$\text{当 } m = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1},$$

$$\text{所以 } f(m) = f(1) = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【标注】【知识点】利用函数奇偶性求参数

24. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期末第6题5分 ★★

已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 那么 $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值为 ().

A. $1 + \sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{3}$

D. $1 - \sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 ,

$$\therefore f(-x) = -f(x) ,$$

$$\therefore f(0) = -f(0) , \text{ 即 } f(0) = 0 ,$$

$$\text{又} \because \text{当 } x < 0 \text{ 时} , f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x ,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} .$$

故选 C .

【标注】 【知识点】 利用函数奇偶性求函数解析式；函数奇偶性的运算