

02指数运算与指数函数

1. 指数运算的概念及运算公式

整数指数幂

1. 正整数指数幂

(1) 定义： $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^n (a \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 运算法则：

① $a^m \cdot a^n =$ _____

② $(a^m)^n =$ _____

③ $a^m \div a^n =$ _____

④ $(ab)^n =$ _____

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ _____

(3) 推广：

① 根据法则③ $a^m \div a^m =$ _____, 因此得到 $a^0 =$ _____

② 据此可得 $a^{-n} =$ _____

【备注】 【答案】 (2) ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; ② $(a^m)^n = a^{mn}$; ③ $a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n, a \neq 0)$;

④ $(ab)^n = a^n b^n$; ⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

(3) ① $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0, a^0 = 1$

② $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$

2. 整数指数幂

根据1, 上面的五条运算法则可以精简为三条：

① $a^m \cdot a^n =$ _____

② $(ab)^n =$ _____

③ $(a^m)^n =$ _____

【备注】 【答案】 ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; ② $(ab)^n = a^n b^n$; ③ $(a^m)^n = a^{mn}$.

根式的概念与性质

1. n 次方根、根式的定义

如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 **n 次方根**, 其中 $n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

表达式 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**, 其中 n ($n > 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$) 叫做**根指数**, a 叫做**被开方数**.

2.根式的性质

根据 n 次方根的意义, 可以得到:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(2) \textcircled{1} \text{当 } n \text{ 是奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a; \textcircled{2} \text{当 } n \text{ 是偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

$$(3) a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

分数指数幂

1.分数指数幂

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in N^*, n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in N^*, n > 1).$$

2.0的分数指数幂

0的正分数指数幂是0, 0的负分数指数幂没有意义.

2. 指数运算典型例题

实数运算

1. 2018~2019学年天津河西区天津市第四十二中学高一上学期期中第16题8分 ★★

计算.

$$\sqrt{6\frac{1}{4}} - (\pi - 1)^0 - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

【答案】 (1) 16.

$$\begin{aligned} \text{【解析】} (1) \quad & \sqrt{\frac{25}{4}} - 1 - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + 4^{(-3) \times (-\frac{2}{3})} \\ &= \frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{2} + 16 \\ &= 16. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】实数指数幂运算; 对数的运算

2. 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第16题 ★★

$$\text{计算: } \left(\frac{9}{16}\right)^{0.5} + (-3)^{-1} \div 0.75^{-2} - \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

【答案】(1) 0.

【解析】(1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{0.5} + (-3)^{-1} \div 0.75^{-2} - \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$
 $= \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{16}{9} - \frac{9}{16}$
 $= \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{9}{16}$
 $= 0.$

【标注】【知识点】实数指数幂运算

代数运算

3. 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第17题10分 ★★

计算：

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}.$$

【答案】(1) $\frac{4}{25}.$

【解析】(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}$
 $= (2^{-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}}$
 $= 2 \cdot 2^{2 \times \frac{3}{2}} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot a^0 \cdot b^0$
 $= \frac{16}{100} = \frac{4}{25}.$

【标注】【知识点】实数指数幂运算

4. 2018~2019学年天津河东区高一上学期期中第16题8分 ★★

化简下列各式.

$$(2a^{\frac{1}{2}}b^{-1})(-6\sqrt{\sqrt{a} \cdot b^3}) \div (-3a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}).$$

【答案】(1) 4.

【解析】(1) $(2a^{\frac{1}{2}}b^{-1})(-6\sqrt{\sqrt{a} \cdot b^3}) \div (-3a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}),$
 $= 2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} \cdot (-6) \cdot (a^{\frac{1}{2}} \cdot b^3) \div [(-3) \cdot a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}],$
 $= 4 \times a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \div (a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{1}{2}}),$
 $= 4a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \cdot b^{-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}},$

$$= 4a^0b^0,$$

$$= 4.$$

【标注】【知识点】对数的运算；利用换底公式求值；实数指数幂运算

5. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第16题8分 ★★★

化简或求值：

$$(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3}.$$

【答案】(1) 原式 $= a - 1$.

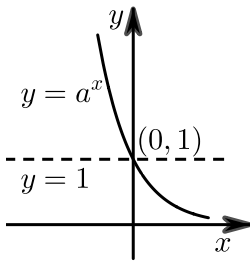
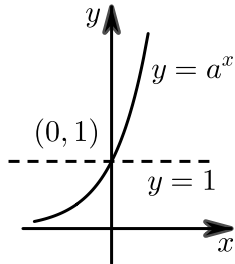
【解析】(1) 由题知 $a - 1 > 0$ 即 $a > 1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } & (\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3} \\ &= a - 1 + |1 - a| + 1 - a \\ &= a - 1. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】对数的概念及其运算；实数指数幂运算

3. 指数函数的图像与性质

1. 指数函数的图像和性质

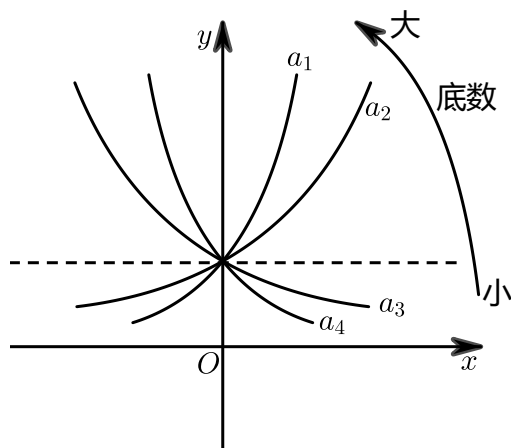
指数函数			
图象			
性 质	定义域		
	值域		
	过定点		
	单调性		

【备注】【答案】

指数函数		$0 < a < 1$	$a > 1$
性 质	定义域	$\mathbb{R}$	
	值域	$(0, +\infty)$	
	过定点	$(0, 1)$	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数

2. 底数对指数函数图象的影响

① 在第一象限具有“底大图高”的特征



② 当 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ 时，函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称。

单调性

6. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第13题4分 ★

若指数函数 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ ($a > 0$) 是减函数，则实数 a 的取值范围是 _____。

【答案】 $(1, \sqrt{2})$

【解析】 $f(x) = (a^2 - 1)^x$ 为指数函数且单调递减，则 $\begin{cases} a > 0 \\ 0 < a^2 - 1 < 1 \end{cases}$ ，

解得 $a \in (1, \sqrt{2})$ 。

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质；利用函数单调性解不等式

7. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第13题5分 ★★

若函数 $y = a^x$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 在 $[2, 3]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a^2}{2}$ ，则 $a =$ _____。

【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$

【解析】 i. $a > 1$ 时，

$y = a^x$ 在 $[2, 3]$ 上单调递增，

$$\therefore a^3 - a^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$a^3 = \frac{3}{2}a^2,$$

$$a = \frac{3}{2}.$$

ii. $0 < a < 1$ 时,

$y = a^x$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减,

$$\therefore a^2 - a^3 = \frac{a^2}{2},$$

$$a^3 = \frac{a^2}{2},$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

故 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】利用指数函数性质求最值

🔍 比较大小

8. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第9题4分 ★★

设 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, $b = \left(\frac{2}{5}\right)^2$, $c = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$, $d = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$, 则 a, b, c, d 的大小关系是 ().

- A. $c > a > b > d$ B. $a > c > b > d$ C. $c > a > d > b$ D. $c > d > a > b$

【答案】 C

【解析】 当 $0 < q < 1$ 时, $f(x) = q^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore c = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = a,$$

$$d = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} > \left(\frac{2}{5}\right)^2 = b,$$

而当 $0 < q < 1$ 时, $f(x) = x^q$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} > d.$$

$$\therefore c > a > d > b.$$

故选 C.

【标注】【知识点】指对幂比较大小

9. 2017~2018学年12月湖北宜昌西陵区金东方高级中学高一上学期月考第9题5分 ★★

设 $a = 4^{0.8}$, $b = 8^{0.46}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【答案】 A

【解析】 $a = 4^{0.8} = 2^{1.6}$, $b = 8^{0.46} = 2^{1.38}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.2} = 2^{1.2}$,

根据函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 ,

而 $1.2 < 1.38 < 1.6$,

$\therefore 2^{1.2} < 2^{1.38} < 2^{1.6}$, 即 $c < b < a$.

故选 A .

【标注】【知识点】用单调性比较大小；指对幂比较大小；指数函数的图象及性质

🔔 过定点问题

10. 2020~2021学年天津东丽区天津一中滨海学校高一上学期期中第15题5分 ★

函数 $f(x) = 2a^{x+1} - 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 _____ .

【答案】 $(-1, -1)$

【解析】 $\because f(x) = 2a^{x+1} - 3$,

令 $x + 1 = 0$, $x = -1$,

$f(-1) = 2 \cdot a^0 - 3 = -1$,

$\therefore$ 过定点 $(-1, -1)$.

【标注】【知识点】指数函数恒过定点问题

11. 2018~2019学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第14题4分 ★★

函数 $g(x) = \frac{1}{3}a^{2x+1} - 2$ 过定点 _____ .

【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

【解析】 令 $2x + 1 = 0$ 得 $x = -\frac{1}{2}$,

则 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}a^0 - 2 = -\frac{5}{3}$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图像恒过定点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$.

故答案为： $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$.

【标注】【知识点】实数指数幂运算

🔔 解不等式

12. 2017年四川乐山高三二模文科第9题5分 ★★★

设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4$ ($x \geq 0$) , 则满足 $f(a - 2) > 0$ 的实数 a 的取值范围为()

A. $(2, +\infty)$ B. $(4, +\infty)$ C. $(0, 4)$ D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ **【答案】** D**【解析】** $\because$ 偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4 (x \geq 0)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, $f(2) = 0$, $\therefore$ 不等式 $f(a-2) > 0$ 等价于 $f(|a-2|) > f(2)$,即 $|a-2| > 2$, 即 $a-2 > 2$ 或 $a-2 < -2$, 解得 $a > 4$ 或 $a < 0$, 故选 D.**【标注】** 【知识点】单调性; 函数单调性与奇偶性综合问题

13. 2020~2021 学年福建福州晋安区福州格致中学高一上学期期中第7题5分 ★

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上奇函数, 满足在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$, 则 $xf(x) > 0$ 的解集是 ().A. $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x|x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ C. $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ **【答案】** D**【解析】** 先在 $(0, +\infty)$ 内化简不等式, 再解指数不等式, 最后根据奇函数性质得结果.在 $(0, +\infty)$ 内 $xf(x) > 0$ 等价于 $f(x) > 0$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2} > 0, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2},$$

$$\therefore 0 < x < 1,$$

$$x < 0 \text{ 时}, f(x) < 0,$$

因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上奇函数,所以 $f(x) < 0$ 得 $-1 < x < 0$,综上解集是 $\{x|-1 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$.

故选 D.

【标注】 【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

14. 2018~2019 学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第12题4分 ★★

已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象经过点 $(2, 4)$, 若 $a^{2x+1} < a^{3x-1}$, 则 x 的取值范围 ____.**【答案】** $x > 2$ **【解析】** $\because f(x) = a^x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象经过点 $(2, 4)$,

$$\therefore a^2 = 4, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\text{若 } a^{2x+1} < a^{3x-1},$$

$$\text{即 } 2^{2x+1} < 2^{3x-1},$$

$$\therefore 2x+1 < 3x-1,$$

$$\text{解得: } x > 2.$$

【标注】【知识点】解指数不等式

15. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第8题4分 ★★

若不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax} < 2^{3x+a^2}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, -1)$ B. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

【答案】 B

【解析】 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增,

$$\text{又} \because \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax} < 2^{3x+a^2} \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore 2^{2ax-x^2} < 2^{3x+a^2} \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore 2ax - x^2 < 3x + a^2 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore x^2 + (3-2a)x + a^2 > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore \Delta < 0,$$

$$(3-2a)^2 - 4a^2 < 0,$$

$$9 - 12a < 0,$$

$$a > \frac{3}{4}.$$

故选 B.

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；解指数不等式

16. 2020年高考真题北京卷第6题4分 ★★★

已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

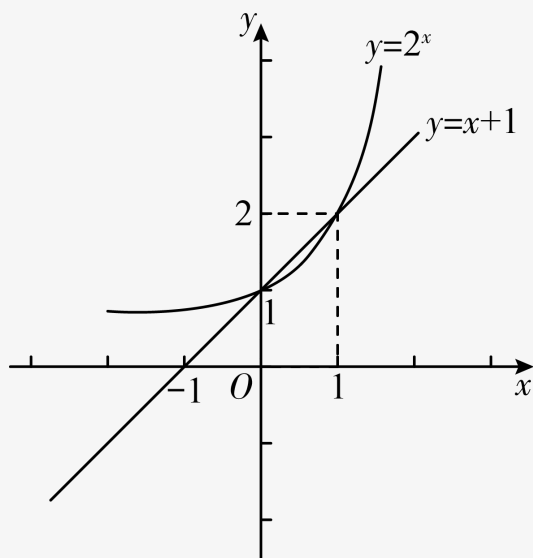
【答案】 D

【解析】 解：不等式 $f(x) > 0$, 即 $2^x > x + 1$.

由于函数 $y = 2^x$ 和直线 $y = x + 1$ 的图象都经过点 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$, 如图所示.

由图可知, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$,

故选：D.



【标注】【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）

实际应用

17. 2020~2021学年天津河东区高一上学期期末第13题4分 ★

某种细菌在培养的过程中，每 15 分钟分裂一次（由一个分裂成两个），则这种细菌由一个分裂成 4096 个需经过 _____ 小时．

【答案】 3

【解析】 $\because 4096 = 2^{12}$ ，

$\therefore$ 由一个分裂成 4096 个需要分裂 12 次，

又 $\because$ 每次分裂需 15 分钟（即 $\frac{1}{4}$ 小时），

$\therefore 12 \times \frac{1}{4} = 3$ （小时）．

故需 3 小时．

【标注】【知识点】指数函数模型

18. 2019~2020学年江苏宿迁沭阳县高二上学期期中第11题5分 ★★

放射性物质的半衰期 T 定义为每经过时间 T ，该物质的质量会衰退原来的一半，铅制容器中有两种放射性物质 A ， B ，开始记录时容器中物质 A 的质量是物质 B 的质量的 2 倍，而 120 小时后两种物质的质量相等，已知物质 A 的半衰期为 7.5 小时，则物质 B 的半衰期为（ ）．

A. 10 小时

B. 8 小时

C. 12 小时

D. 15 小时

【答案】 B

【解析】

由题意，物质 A 经过 316 个半衰期，没开始记录时容器中物质 A 的质量是 $2m$ ，物质 B 的质量为 m ，则 $2m \times \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = m \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ 。所以物质 B 经过了 15 个半衰期，则物质 B 的半衰期为 $\frac{120}{15} = 8$ 。
故选 B。

【标注】【知识点】指数函数模型

19. 2020~2021 学年天津滨海新区高一上学期期末第 11 题 5 分 ★★

某种食品的保鲜时间 y （单位：小时）与储存温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）近似满足函数关系 $y = 3^{kx+b}$ （ k, b 为常数），若该食品在 0°C 的保鲜时间是 288 小时，在 5°C 的保鲜时间是 144 小时，则该食品在 15°C 的保鲜时间近似是（ ）。

- A. 32 小时 B. 36 小时 C. 48 小时 D. 60 小时

【答案】B

【解析】
$$\begin{cases} 3^b = 288 \\ 3^{5k+b} = 144 \end{cases},$$

$$\therefore 3^{5k} = \frac{1}{2}.$$

当 $x = 15$ 时，

$$\begin{aligned} 3^{15k+b} &= 3^{15k} \cdot 3^b \\ &= (3^{5k})^3 \cdot 3^b \\ &= \frac{1}{8} \times 288 \\ &= 36. \end{aligned}$$

故选 B。

【标注】【知识点】指数函数模型

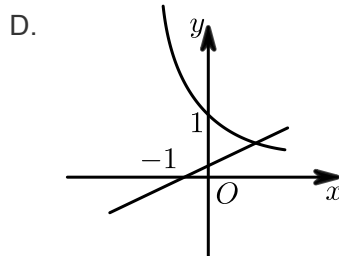
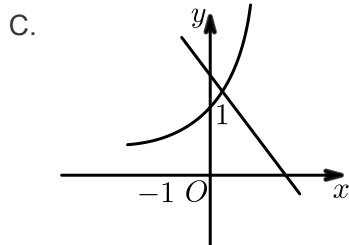
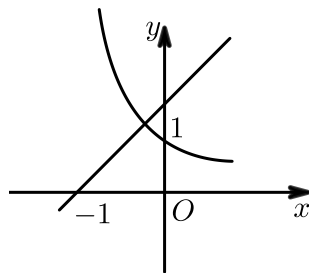
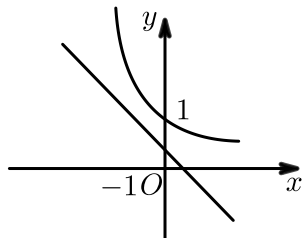
4. 指数函数综合问题

图像辨析

20. 2019~2020 学年浙江高一上学期期中（浙北 G2 联盟）第 5 题 4 分 ★★

函数 $y = x + a$ 与 $y = a^x$ ，其中 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，它们的大致图象在同一直角坐标系中有可能是（ ）。

- A. B.



【答案】 D

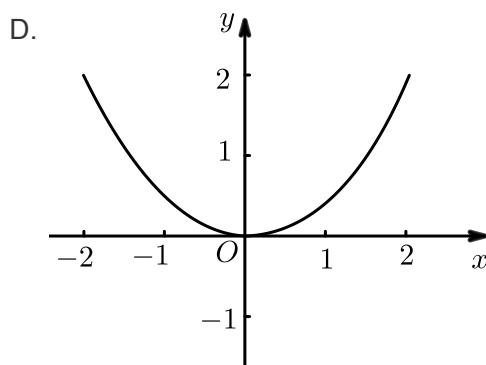
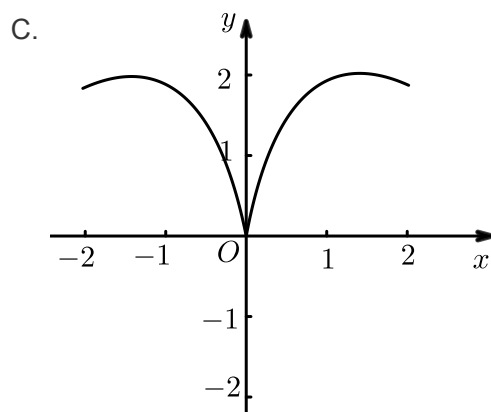
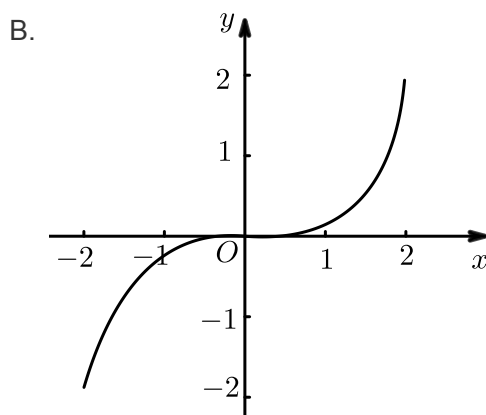
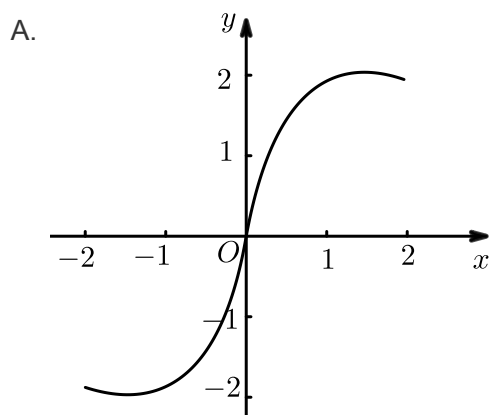
【解析】 ① $0 < a < 1$ ，则 $y = a^x$ 为减函数， $y = x + a$ 为增函数且与 y 轴交点位于 y 正半轴交点纵坐标小于 1，故 A、B、C 错误；

② $a > 1$ ，则 $y = a^x$ 为增函数， $y = x + a$ 与 y 轴交点位于 y 正半轴，故 D 正确。
故选 D。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

21. 2020~2021学年天津和平区天津市汇文中学高一上学期期中第9题3分 ★★

函数 $f(x) = x \cdot 2^{2-|x|}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的图象可能是 ()。



【答案】 A

【解析】 因为 $f(-x) = -x \cdot 2^{2-|-x|} = -x \cdot 2^{2-|x|} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数 ,

其图象关于原点对称 , 排除 C , D ,

因为 $f(1) = f(2) = 2$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上不单调 , 排除 B .

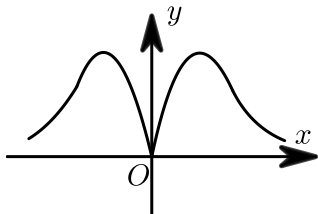
故选 A .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题 ; 根据奇偶性确定图象

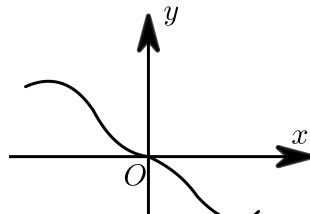
22. 2020~2021学年浙江杭州西湖区杭州学军中学高一上学期期末第4题4分 ★★

函数 $f(x) = \frac{x^2}{2^x + 2^{-x}}$ 的图象大致是 () .

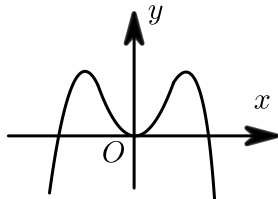
A.



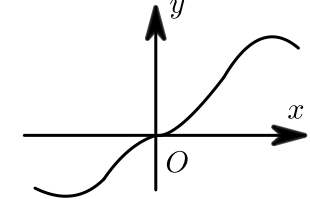
B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】 $\because f(x) = \frac{x^2}{2^x + 2^{-x}} ;$

$$\therefore f(-x) = \frac{(-x)^2}{2^{-x} + 2^x} = \frac{x^2}{2^{-x} + 2^x} ;$$

$$\therefore f(x) = f(-x) ;$$

$\therefore f(x)$ 的图像关于 y 轴对称 ;

故排除选项 B 和 D ;

$$\text{又} \because x^2 \geq 0, 2^x + 2^{-x} > 0 ,$$

$$\therefore f(x) \geq 0 .$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

23. 2017~2018学年天津河西区高一上学期期中第8题3分 ★★

已知 $f(x) = |2^x - 1|$ ，当 $a < b < c$ 时，有 $f(a) > f(c) > f(b)$ ，则必有 () .

A. $a < 0, b < 0, c < 0$

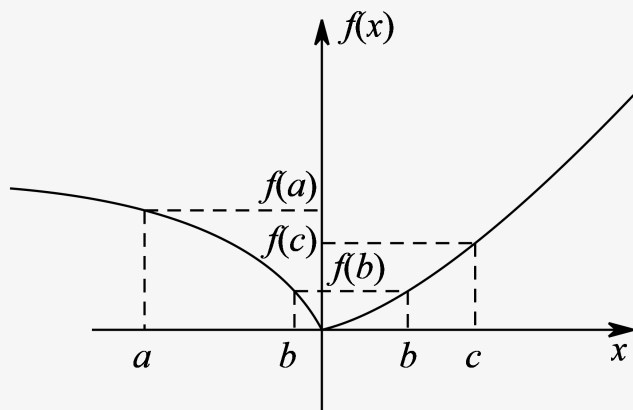
B. $a < 0, b > 0, c > 0$

C. $2^{-a} < 2^c$

D. $1 < 2^a + 2^c < 2$

【答案】 D

【解析】 根据题意画出函数图象，



A. 三个不可能都小于 0，应为都为负数时，函数单调递减即 $a < b < c$ 时，得不到 $f(a) > f(c) > f(b)$ ；

B. b 的符合不一定为正，还可以为负；

C. $\because -a > c > 0, \therefore 2^{-a} > 2^c$ ，故错误；

D. 根据函数图象可以知道： $a < 0, c > 0$ ，

$\therefore 0 < 2^a < 1, 2^c > 1$ ，

$\therefore 1 < 2^a + 2^c < 2$ ，

所以 D 选项是正确的．

故选 D．

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质

分段函数单调性

24. 2018~2019 学年安徽合肥庐阳区合肥市第九中学高二下学期期中文科第 10 题 5 分 ★★

设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax - 1, & x < 0 \\ a^x - 3a, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 a 的取值范围是 () .

A. $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

C. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$

D. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x) = \begin{cases} -ax - 1, & x < 0 \\ a^x - 3a, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

故对于 $-ax - 1$ ， $-a < 0$ ，即 $a > 0$ ，

对于 $a^x - 3a$, $0 < a < 1$,
 且满足当 $x = 0$ 时, $-ax - 1 \geq a^x - 3a$,
 即 $-a < 0 - 1 \geq a^0 - 3a$,
 解得: $a \geq \frac{2}{3}$,
 综上所述: a 的取值范围是: $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$.
 故选 A.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式

复合函数单调性

25. 2019~2020学年广东深圳龙岗区深圳科学高中高一上学期期中模拟(二)第7题5分 ★★

函数 $y = 5^{2x^2 - 3x + 1}$ 的单调递增区间为 ().

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

【答案】 D

【解析】 因函数 $y = 5^x$ 为增函数,

故问题就是求 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的增区间,

因 $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 其图象开口向上, 对称轴方程为 $x = \frac{3}{4}$,

故函数 $2x^2 - 3x + 1$ 在 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 上递增,

从而函数 $y = 5^{2x^2 - 3x + 1}$ 相在 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 上递增.

故选 D.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

26. 2019~2020学年陕西西安莲湖区高一上学期期中第11题4分 ★★

函数 $y = 5^{-x^2 + 4x - 3}$ 的单调递减区间是 ().

- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 $y = 5^{-x^2 + 4x - 3}$ 是 $y = 5^t$, $t = -x^2 + 4x - 3$ 的复合函数,

要使 $y = 5^{-x^2 + 4x - 3}$ 单调递减,

即要求 $t = -x^2 + 4x - 3$ 的递减区间,

对称轴 $x = 2$,

$\therefore t$ 在 $[2, +\infty)$ 上递减.

故选 A .

【标注】【知识点】指数函数与二次函数复合；判断复合函数单调性

27. ★★

讨论函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 的单调性 .

【答案】 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是增函数；在 $[1, +\infty)$ 上是减函数 .

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,

$$\text{令 } u = x^2 - 2x, \text{ 则 } y = \left(\frac{1}{3}\right)^u,$$

$\because u = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数 ,

又 $\because y = \left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在其定义域内是减函数 ,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是增函数 ;

又 $u = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数 ,

$\because y = \left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在其定义域内是减函数 ,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数 .

【标注】【知识点】指数函数与二次函数复合；判断复合函数单调性

28. 2018~2019学年内蒙古呼和浩特回民区呼和浩特市第一中学高一上学期期中第16题5分 ★★

函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x-2}$ 的函数单调递减区间是 _____ .

【答案】 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

【解析】 令 $t = -x^2 + 3x - 2$, 其对称轴为 $x = \frac{3}{2}$, 开口向下 ,

$\therefore t = -x^2 + 3x - 2$ 在 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ 单调递增 , 在 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 单调递减 , 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 ,

$\therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x-2}$ 的单调减区间为 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, 单调增区间为 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性；指数函数与二次函数复合



复合型指数函数的值域

29. 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第12题4分 ★★

函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-1}$ 的值域是 _____ .

【答案】 $(0, 4]$

【解析】 设 $t = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2 \geq -2$,

则 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $t \geq -2$,

$\therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $t \geq -2$ 是定义域内减函数 ,

$\therefore$ 值域为 $(0, 4]$.

故答案为 : $(0, 4]$.

【标注】 【知识点】 求复合函数的值域

30. 2018~2019学年天津西青区天津市西青区杨柳青第一中学高一上学期期中第20题8分 ★★

求函数 $y = 9^x - 4 \cdot 3^x + 1$ 在 $x \in [0, 2]$ 上的值域 .

【答案】 $[-3, 46]$.

【解析】 令 $t = 3^x$, 则 $y = t^2 - 4t + 1$,

$\therefore x \in [0, 2]$,

$\therefore t \in [1, 9]$,

对称轴为 $t = 2$,

$\therefore y = t^2 - 4t + 1$ 的单调递减区间为 $[1, 2]$, 单调递增区间为 $[2, 9]$,

当 $t = 1$ 时 , $y = -2$;

当 $t = 2$ 时 , $y = -3$;

当 $t = 9$ 时 , $y = 46$,

$\therefore$ 函数的值域是 $[-3, 46]$.

【标注】 【知识点】 求复合函数的值域

31. 2020~2021学年广东深圳福田区深圳市高级中学高中部高一上学期期中第19题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值的和为 6 .

(1) 求函数 $f(x)$ 解析式 .

(2) 求函数 $g(x) = f(2x) - 8f(x)$ 在 $[1, m]$ ($m > 1$) 上的最小值 .

【答案】 (1) $f(x) = 2^x$.

(2) $g(x)_{\min} = \begin{cases} 4^m - 8 \cdot 2^m, & 1 < m \leq 2 \\ -16, & m > 2 \end{cases}$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值之和为 6,

$$\text{则 } a + a^2 = 6, \text{ 即 } a^2 + a - 6 = 0,$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -3$ (舍),

$$\text{故 } a = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2^x.$$

$$(2) g(x) = f(2x) - 8f(x) = 2^{2x} - 8 \cdot 2^x,$$

令 $2^x = t$, 则原函数化为 $m(t) = t^2 - 8t, t \in [2, 2^m]$,

其对称轴方程为 $t = 4$,

当 $2^m \leq 4$, 即 $1 < m \leq 2$ 时, 函数最小值为:

$$(2^m)^2 - 8 \cdot 2^m = 4^m - 8 \cdot 2^m,$$

当 $2^m > 4$, 即 $m > 2$ 时, 函数的最小值为 $4^2 - 8 \times 4 = -16$,

$\therefore g(x) = f(2x) - 8f(x)$ 在 $[1, m]$ ($m > 1$) 上的最小值为

$$g(x)_{\min} = \begin{cases} 4^m - 8 \cdot 2^m, & 1 < m \leq 2 \\ -16, & m > 2 \end{cases}.$$

【标注】 【知识点】用换元法求值域; 用单调性观察法求值域; 定轴动区间求值域

指数函数与函数性质综合

32. 2018~2019学年9月天津河东区天津市第五十四中学高一上学期月考第10题3分 ★★

设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + 2x - b$ (b 为常数), 则 $f(-1) = ()$.

A. -5

B. -3

C. 5

D. 3

【答案】 B

【解析】 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$$f(0) = 2^0 + 2 \times 0 - b = 0.$$

$$\text{即 } b = 1.$$

$$\therefore x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = 2^x + 2x - 1.$$

$$\therefore f(-1) = -f(1) = -(2^1 + 2 - 1) = -3.$$

【标注】 【知识点】函数奇偶性的运算

33. 2018~2019学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期中第15题 ★★

已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 则不等式 $f(x+2) + f(1-2x) < 0$ 的解集为 _____.

【答案】 $(3, +\infty)$

【解析】 因为 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数 ,

$$\text{因为 } f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1} ,$$

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上单调递增函数 ,

因此 $f(x+2) + f(1-2x) < 0$ 等价于 $f(x+2) < -f(1-2x)$, $f(x+2) < f(-1+2x)$,
 $x+2 < -1+2x$, $x < 3$, 即解集为 $(3, +\infty)$.

故答案为 : $(3, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 利用定义判断函数奇偶性 ; 利用函数单调性解不等式 ; 判断复合函数单调性

34. 2020~2021学年天津天津塘沽紫云中学高一上学期期中第19题12分 ★★★

已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$ 为奇函数 .

(1) 求 a 的值 , 并证明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数 .

(2) 若对任意的 $t \in [-1, 1]$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立 , 求实数 k 的取值范围 .

【答案】 (1) $a = -1$, 证明见解析 .

(2) $k > 5$.

【解析】 (1) $\because f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$ 为奇函数 ,

$$\therefore f(0) = 0 ,$$

$$\therefore \frac{1+a}{1+1} = 0 ,$$

$$\therefore a = -1 ,$$

经检验 $a = -1$ 时 $f(x)$ 为奇函数 ,

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1} ,$$

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

不妨设 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - \frac{2}{2^{x_1} + 1} - \left(1 - \frac{2}{2^{x_2} + 1} \right) , \\ &= \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} < 0 , \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2) ,$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数 .

(2) $\because f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$,

$$\therefore f(t^2 - 2t) < -f(2t^2 - k) ,$$

$$f(t^2 - 2t) < f(k - 2t^2) ,$$

$\therefore k - 2t^2 > t^2 - 2t$ 时 $\forall t \in [-1, 1]$ 恒成立 ,

$$\therefore k > (3t^2 - 2t)_{\max} ,$$

$$3t^2 - 2t$$

$$\begin{aligned}
 &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \\
 &\leq 5, \\
 &\therefore k > 5.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式；用定义法证明函数的单调性