

03对数运算与对数函数

1. 对数运算

1.对数的定义

一般地, 如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $b = \log_a N$,

其中 a 叫做对数的**底数**, N 叫做**真数**.

2.两个特殊的对数

(1) **常用对数**: 以**10为底**的对数; N 的常用对数 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$.

(2) **自然对数**: 以**e为底**的对数; N 的自然对数 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$.

【备注】 【补充】无理对数 $e=2.71828\dots$

3.对数的性质

对数 $\log_a N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 具有如下性质:

①负数和零没有对数, 即 $N > 0$.

② 1的对数是 0, 即 $\log_a 1 = 0$ ($\because a^0 = 1$).

③底的对数是 1, 即 $\log_a a = 1$ ($\because a^1 = a$).

④对数恒等式: 如果把 $a^b = N$ 中的 b 写成 $\log_a N$, 那么 $a^{\log_a N} = N$, 同理 $\log_a a^b = b$.

4.对数的运算公式

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

(1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$, 即积的对数等于对数的和.

推广: $\log_a (N_1 N_2 \cdots N_K) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_K$.

(2) $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$, 即商的对数等于对数的差.

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbf{R}$).

5.对数换底公式

$\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$, 由此可得:

(1) $\log_N M \cdot \log_M N = 1$.

(2) $\log_{N^m} M^n = \frac{n}{m} \log_N M$.

(3) $\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}$.

由 (3) 可得:

$$(4) \log_a M \cdot \log_b N = \log_a N \cdot \log_b M .$$

对数运算

1. 2020~2021学年天津高一上学期期末(部分区)第12题4分 ★★

已知 e 为自然对数的底数, 计算: $2^{\frac{1}{4}} \times 8^{0.25} + \lg \frac{1}{100} + 2 \ln \sqrt{e} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 $2^{\frac{1}{4}} \times 8^{0.25} + \lg \frac{1}{100} + 2 \ln \sqrt{e}$
 $= (2 \times 8)^{\frac{1}{4}} + (-2) + 2 \times \frac{1}{2}$
 $= 2 + (-2) + 1$
 $= 1 .$
 故答案为: 1 .

【标注】【知识点】指对化简求值

2. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第11题5分 ★

已知 $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 64

【解析】 $\because \log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$,
 $\therefore \log_3 (\log_4 x) = 1$,
 $\therefore \log_4 x = 3$,
 $\therefore x = 4^3 = 64$.

【标注】【知识点】解对数方程

3. 2020~2021学年天津西青区高一上学期期末第11题5分 ★★

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{2 \times \sqrt[3]{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{14}{3}$

【解析】 原式 $= 2 \log_2 3 \cdot \log_3 2 + \frac{2}{3} + \sqrt{4} = 2 + \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3}$.
 故答案为: $\frac{14}{3}$.

【标注】【知识点】指对化简求值

4. 2020~2021学年12月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第20题 ★★

计算或化简：

$$(1) \log_3 \sqrt{27} - \log_3 2 \cdot \log_2 3 - 2^{\log_2 3} + \lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5}.$$

$$(2) (\lg 2)^2 + \lg 20 \cdot \lg 5 + \log_9 2 \cdot \log_4 3.$$

【答案】(1) -2.

$$(2) \frac{5}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解析】} (1) & \log_3 \sqrt{27} - \log_3 2 \cdot \log_2 3 - 2^{\log_2 3} + \lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5} \\ &= \frac{3}{2} - 1 - 3 + \lg \sqrt{10} \\ &= \frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

故答案为：-2.

$$\begin{aligned} (2) & (\lg 2)^2 + \lg 20 \cdot \lg 5 + \log_9 2 \cdot \log_4 3 \\ &= (\lg 2)^2 + (\lg 4 + \lg 5) \lg 5 + \log_{3^2} 2 \cdot \log_{2^2} 3 \\ &= (\lg 2)^2 + 2 \lg 2 \lg 5 + (\lg 5)^2 + \frac{1}{4} \\ &= (\lg 2 + \lg 5)^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{5}{4}$.

【标注】【知识点】对数的运算；换底公式及其变形运用

5. 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第6题4分 ★★

已知 $\lg a$, $\lg b$ 是方程 $6x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根，则 $\left(\lg \frac{b}{a}\right)^2$ 等于 ().

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{13}{9}$

C. $\frac{14}{9}$

D. $\frac{22}{9}$

【答案】D

【解析】由韦达定理得：

$$\begin{aligned} \lg a + \lg b &= \frac{2}{3}, \quad \lg a \cdot \lg b = -\frac{1}{2}, \\ \left(\lg \frac{b}{a}\right)^2 &= (\lg b - \lg a)^2 \\ &= (\lg b + \lg a)^2 - 4 \lg a \cdot \lg b \\ &= \frac{22}{9}. \end{aligned}$$

故选 D.

【标注】【知识点】对数的概念及其运算

6. 2020~2021学年12月天津河西区天津市海河中学高一上学期月考第6题 ★★

已知 $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, 则 $\frac{x}{y} =$ _____ .

【答案】 4

【解析】 $\lg(x-2y)^2 = \lg(xy)$,

$$\text{则有} \begin{cases} (x-2y)^2 = xy \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 - 5 \cdot \frac{x}{y} = 0 \\ x-2y > 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} ,$$

$$\text{即} \frac{x}{y} = 1 \text{ 或 } \frac{x}{y} = 4 ,$$

当 $\frac{x}{y} = 1$ 时 , $x-2y < 0$, 不合题意 ,

当 $\frac{x}{y} = 4$ 时 , 符合题意 ,

$$\therefore \frac{x}{y} = 4 .$$

【标注】【知识点】对数方程和对数不等式

7. 2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第13题4分 ★★

已知 $2^a = 6$, $3^b = 36$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} =$ _____ .

【答案】 1

【解析】 $\because 2^a = 6$,

$$\therefore a = \log_2 6 ,$$

$$\because 3^b = 36 ,$$

$$\therefore b = \log_3 36 = 2\log_3 6 ,$$

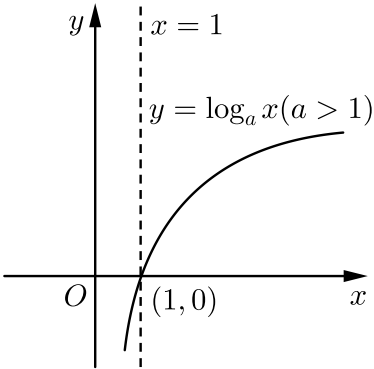
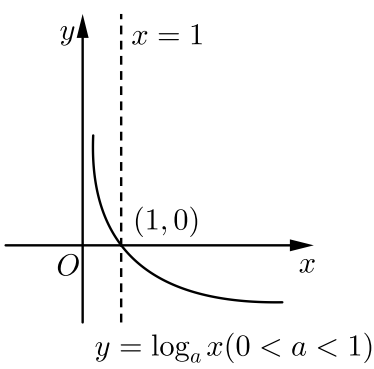
$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$$

$$= \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1 .$$

【标注】【知识点】指对化简求值

2. 对数函数的图像与性质

1. 对数函数的图像及性质 $y = \log_a x$

a		
图像		
定义域		
值域		
定点		
单调性		

【备注】 【答案】

a 的范围

$a > 1$

$0 < a < 1$

定义域

$(0, +\infty)$

值域

$\mathbf{R}$

定点

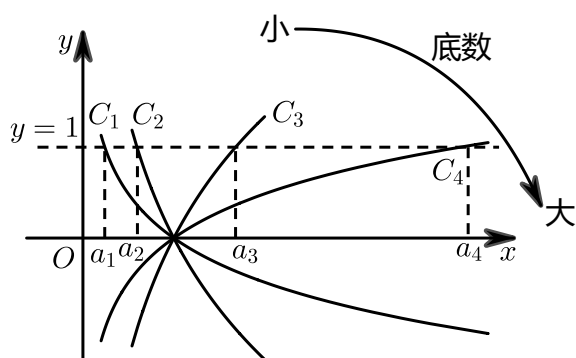
$(1, 0)$

单调性

在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

2.底数对对数函数图像的影响

(1)当 $x > 1$ 时 “底大图低” ; 当 $0 < x < 1$ 时 “底大图高” .



(2)在同一坐标系中, $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称.

 定义域

8. 2017~2018学年福建厦门同安区同安一中高一上学期期中第2题5分 ★

函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \lg(3x+1)$ 的定义域是 () .

- A. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[-2, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$ D. $(-\infty, 2]$

【答案】 C

【解析】 要使函数有意义，则 $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases}$ ，

$$\text{即 } \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x \leq 2,$$

即函数的定义域为 $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$.

故选 C .

【标注】 【知识点】 求具体函数（包括复合函数）的定义域

9. 2019~2020学年山东青岛市南区青岛第三十九中学高二下学期开学考试第3题5分 ★

函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 () .

- A. $(-4, -1)$ B. $(-4, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 1]$

【答案】 C

【解析】 要使函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 有意义，则 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ -x^2-3x+4 > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 1$ ，即函数的定义域是 $(-1, 1)$ ，故选 C.

【标注】 【知识点】 求具体函数（包括复合函数）的定义域

10. 2017年宁夏银川金凤区银川市第九中学高三一模文科第15题5分 ★

若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 _____ .

【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】 要使函数有意义，则有 $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0 \end{cases}$ ，

$$\text{即 } \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 2x+1 < 1 \end{cases} \text{ . 所以解得 } -\frac{1}{2} < x < 0,$$

即不等式的定义域为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

11. 2018~2019学年天津河西区天津市实验中学高一上学期期中第3题3分 ★

函数 $f(x) = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 1}}{3x - 1}$ 的定义域是 () .

- A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 2\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 要使 $f(x)$ 有意义，则需 $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x - 1 \geq 0 \\ 3x - 1 \neq 0 \end{cases}$ ，

解得 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ，且 $x \neq \frac{1}{3}$ ，

$\therefore f(x)$ 的定义域为： $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 求具体函数（包括复合函数）的定义域

📍 定点

12. 2019~2020学年天津红桥区高一上学期期末第3题4分 ★

函数 $f(x) = \log_a(x - 1) + 2$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点是 () .

- A. (2, 2) B. (2, 3) C. (1, 0) D. (2, 1)

【答案】 A

【解析】 当 $x = 2$ 时，

$$f(2) = \log_a 1 + 2 = 2，$$

过定点 (2, 2) .

故选 A .

【标注】 【知识点】 对数函数恒过定点问题

13. 2019~2020学年11月天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高一上学期月考第15题5分 ★★★

函数 $y = \log_a(x - 1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A，若点 A 在一次函数 $y = mx + n$ 的图象上，其中 $m > 0$ ， $n > 0$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 8

【解析】 $\because$ 函数 $y = \log_a(x - 1) + 1$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A，

可得 $A(2, 1)$,

$\therefore$ 点 A 在一次函数 $y = mx + n$ 的图象上,

$$\therefore 2m + n = 1,$$

$$\therefore m, n > 0,$$

$$\therefore 2m + n = 1 \geq 2\sqrt{2mn},$$

$$\therefore m \leq \frac{1}{8},$$

$$\therefore \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right) = \frac{2m+n}{mn} = \frac{1}{mn} \geq 8 \text{ (当且仅当 } n = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4} \text{ 时等号成立)}.$$

故答案为 8.

【标注】【知识点】倒数和形式；基本不等式的实际应用

比较大小

14. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第2题3分 ★★

已知 $a = 0.3^2$, $b = \log_2 0.3$, $c = 2^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

【答案】 C

【解析】 由指数函数和对数函数的性质可知,

$$a = 0.3^2 \in (0, 1), b = \log_2 0.3 < 0, c = 2^{0.3} > 1,$$

所以 $b < a < c$, 故选: C.

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质；对数函数的图象及性质；指对幂比较大小

15. 2020~2021学年12月天津河西区天津市海河中学高一上学期月考第2题 ★★

已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $c = \log_3 \frac{1}{2}$, 则从小到大排列为 _____.

【答案】 $c < a < b$

【解析】 $\therefore 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0$,

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\therefore b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 2 = 1,$$

$$\therefore b > 1,$$

$$\therefore \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 = 0,$$

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore c < a < b.$$

【标注】【知识点】指对幂比较大小

16. ★★★

若 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$, $c = \log_4 6$, 则下列结论正确的是()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【答案】D

【解析】 $c = \log_4 6 = \frac{1}{2} \log_2 6 = \log_2 \sqrt{6} < a = \log_2 3$; $c = \log_4 6 > 1 > b = \log_3 2$

【标注】【知识点】对数比大小

17. 2020~2021学年天津和平区高一上学期期末第6题4分 ★★

已知 $a = \log_2 \sqrt{5}$, $b = \log_5 \sqrt{2}$, $c = 3^{-0.5}$, 则() .

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

【答案】D

【解析】 $\because y = \log_2 x$ 在 $(c, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore \log_2 \sqrt{5} > \log_2 2 = 1,$$

$$\therefore a > 1,$$

$\because y = \log_5 x$ 在 $(a, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore \log_5 1 < \log_5 \sqrt{2} < \log_5 2^{\frac{1}{2}} = \log_5 4^{\frac{1}{4}} < \log_5 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore c < b < \frac{1}{4},$$

$$\therefore 3^{-0.5} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{易知 } \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1,$$

$$\therefore \frac{1}{4} < c < 1,$$

$$\therefore a > c > b.$$

故选 D.

【标注】【知识点】指对幂比较大小

18. 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期末第6题4分 ★★

已知 $a = \log_2 4.1$, $b = 2^{0.8}$, $c = 0.5^{-2.7}$, 则 a, b, c 的大小关系为() .

- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

【答案】A

【解析】 $\because y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增 ,
 $\therefore \log_2 8 > \log_2 4.1 > \log_2 4 = 2$,
 $\therefore 3 > a > 2$,
 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增 ,
 $\therefore 2^0 < 2^{0.8} < 2^1$,
 $\therefore 1 < b < 2$,
 $c = 0.5^{-2.7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2.7} = 2^{2.7} > 2^2 = 4$,
 $\therefore c > a > b$,
 故选 A .

【标注】【知识点】指对幂比较大小

19. 2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第5题3分 ★★

已知 $a = 1.9^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 1.9$, $c = 0.4^{1.9}$, 则 () .

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

【答案】 C

【解析】 $\because y = 1.9^x$ 为增函数 ,
 $\therefore 1.9^{0.4} > 1.9^0 = 1$,
 $\therefore a > 1$,
 $\because y = \log_{0.4} x$ 为减函数 ,
 $\therefore \log_{0.4} 1.9 < \log_{0.4} 1 = 0$,
 $\therefore b < 0$,
 $\because y = 0.4^x$ 为减函数 ,
 $\therefore 0 < 0.4^{1.9} < 0.4^0$,
 $\therefore 0 < 0.4^{1.9} < 1$,
 $\therefore 0 < c < 1$,
 $\therefore a > c > b$.
 故选 C .

【标注】【知识点】指对幂比较大小；用单调性比较大小

20. 2020~2021学年天津高一上学期期末（六校联考）第5题4分 ★★

设 $a = \log_{0.5} 0.6$, $b = \log_{0.6} 1.2$, $c = 1.2^{0.6}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系为 () .

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

【答案】 B

【解析】 $\because y = \log_{0.5} x$ 在 $(0, +\infty)$ 单减 ,
 $\therefore \log_{0.5} 0.5 > \log_{0.5} 0.6 > \log_{0.5} 1$,
 $\therefore 0 < a < 1$.
 $\because y = \log_{0.6} x$ 在 $(0, +\infty)$ 单减 ,
 $\therefore \log_{0.6} 1.2 < \log_{0.6} 1 = 0$,
 $\therefore b < 0$.
 $\because y = 1.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增 ,
 $\therefore 1.2^{0.6} > 1.2^0 = 1$,
 $\therefore c > 1$,
故 $b < a < c$.
故选 B .

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

21. 2020~2021学年天津红桥区高一上学期期末第9题4分 ★★

已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $a = f\left(\frac{1}{4}\right)$, $b = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $c = f(2)$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $a > c > b$

【答案】 A

【解析】 $a = \left| \lg \frac{1}{4} \right| = \lg 4$, $b = \left| \lg \frac{1}{3} \right| = \lg 3$, $c = |\lg 2| = \lg 2$,
 $\because y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 单增 ,
 $\therefore \lg 4 > \lg 3 > \lg 2$,
 $\therefore a > b > c$.
故选 A .

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小 ; 对数函数的图象及性质

 解不等式

22. 2020~2021学年天津河西区高一上学期期末第3题4分 ★★

已知集合 $A = \{y | y = \log_2 x, x > 1\}$, $B = \left\{y | y = \frac{1}{2^x}, x > 1\right\}$, 则 $A \cap B = ()$.

A. $\left\{y | 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$

B. $\{y | 0 < y < 1\}$

C. $\left\{y | \frac{1}{2} < y < 1\right\}$

D. $\emptyset$

【答案】 A

【解析】 $\because x > 1$,

又 $\because y = \log_2 x$ 为增函数,

$$\therefore \log_2 x > \log_2 1 = 0,$$

$$\therefore A = (0, +\infty),$$

$$\because x > 1,$$

又 $\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数,

$$\therefore 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore A \cap B = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

故选 A.

【标注】【知识点】交集；指数函数的图象及性质；对数函数的图象及性质

23. 2020~2021学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第7题5分 ★★

已知 $A = \{x | 2^x - 16 \leq 0\}$, $B = \{x | \log_2(x-1) \geq 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $[3, 4]$

B. $[-2, 4]$

C. $[-2, +\infty)$

D. $[2, 3]$

【答案】 A

【解析】 $\because 2^x - 16 \leq 0$,

$$\therefore x \leq 4.$$

$$\therefore A = (-\infty, 4],$$

$$\therefore \log_2(x-1) \geq 1,$$

$$\therefore x-1 \geq 2.$$

$$\therefore x \geq 3,$$

$$\therefore B = [3, +\infty).$$

$$\therefore A \cap B = [3, 4].$$

故选 A.

【标注】【知识点】交集

24. 2020~2021学年10月北京海淀区中央民族大学附属中学高三上学期月考第3题5分 ★★

设 $p: \log_2 x < 0$, $q: 2^{x-1} < 1$, 则 p 是 q 的 $(\quad)$.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because p: \log_2 x < 0$,

则 $\log_2 x < \log_2 1$,

可得 $0 < x < 1$,

$q: 2^{x-1} < 1$,

则 $2^{x-1} < 2^0$,

可得 $x - 1 < 0$,

即 $x < 1$,

$\therefore 0 < x < 1 \Rightarrow x < 1$,

但 $0 < x < 1 \nLeftarrow x < 1$,

所以 p 是 q 的充分而不必要条件,

故 A 正确.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

赋值运算

25. 2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第6题3分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{16}\right)\right)$ 的值为 ().

A. 1

B. $2^{\frac{1}{2}}$

C. 2

D. 4

【答案】 C

【解析】 $f\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$,

$\therefore f\left(f\left(\frac{1}{16}\right)\right) = f(-4) = [-(-4)]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$.

故选 C.

【标注】 【知识点】 分段函数

26. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第8题4分 ★★

已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 5^{-x} - 1$, 则 $f(\log_{49} 9 \cdot \log_5 7)$ 的值为 ().

A. -4

B. -2

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 5^{-x} - 1$,

$$\therefore f(-x) = -f(x) = -5^{-x} + 1,$$

$$\therefore \log_{49} 9 \cdot \log_5 7 = \log_7 3 \cdot \log_5 7 = \log_5 3,$$

$$\text{且 } \log_5 3 > 0,$$

$$\therefore f(\log_{49} 9 \cdot \log_5 7) = f(\log_5 3) = -3 + 1 = -2.$$

故选 B.

【标注】【知识点】利用换底公式求值

27. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第8题4分 ★★

已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1$, 若实数 a 满足 $f(-a) = 2$, 则 $f(a)$ 等于 ().

A. 1

B. 0

C. -1

D. -2

【答案】B

【解析】 $\therefore$ 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1$,

实数 a 满足 $f(-a) = 2$,

$$\therefore f(-a) = \ln(-a + \sqrt{a^2 + 1}) + 1 = 2,$$

$$\therefore \ln(-a + \sqrt{a^2 + 1}) = 1,$$

$$\therefore f(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) = -\ln(-a + \sqrt{a^2 + 1}) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

故选: B.

【标注】【知识点】指对化简求值

3. 对数函数综合问题

分段函数单调性

28. 2020~2021学年山东青岛崂山区青岛第二中学高一上学期期末模拟(一)第8题5分 ★★

已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x + a, & x \geq 2 \\ \log_a(x-1), & 1 < x < 2 \end{cases}$ 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(0, \frac{2}{5}\right]$

D. $\left(0, \frac{1}{5}\right]$

【答案】C

【解析】由题意得 $\begin{cases} 2a-1 < 0 \\ 0 < a < 1 \\ 2(2a-1) + a \leq \log_a 1 \end{cases}$,

$$\therefore 0 < a \leq \frac{2}{5}.$$

故选 C.

【标注】【知识点】分段函数；单调性

复合函数单调性

29. 2018~2019学年12月四川成都温江区成都市实验外国语学校（西区）高一上学期周测C卷第7题

★★

函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$ 的单调递增区间是 () .

- A. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}, 2\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$

【答案】B

【解析】要使函数有意义，则 $6+x-2x^2 > 0$ ，

解得 $-\frac{3}{2} < x < 2$ ，

故函数的定义域是 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

令 $t = -2x^2 + x + 6$ ，

则函数 t 在 $\left(-3, \frac{1}{4}\right)$ 上递增，在 $\left[\frac{1}{4}, 2\right)$ 上递减，

又因函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在定义域上单调递减，

故由复合函数的单调性知 $y = \log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{1}{4}, 2\right)$.

故选 B .

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

30. 2020~2021学年12月天津河东区天津市第三十二中学高一上学期月考第12题5分 ★

函数 $y = \log_{0.5}(9-x^2)$ 的单调递减区间为 _____ .

【答案】 $(-3, 0]$

【解析】 $\because 9-x^2 > 0$ ，

$\therefore -3 < x < 3$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (-3, 0]$ 时，

$y = 9-x^2$ 单调递增，

$\therefore y = \log_{0.5}(9-x^2)$ 单调递减 .

【标注】【知识点】判断复合函数单调性

31. 2019~2020学年浙江杭州西湖区高一上学习期中 ★★★

已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 4]$ B. $(-\infty, 4)$ C. $(-4, 4]$ D. $[-4, 4]$ **【答案】** D**【解析】** 解：令 $t = x^2 - ax + 3a$ ，则由题意可得函数 t 在区间 $(2, +\infty)$ 上是增函数，且 $t > 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{a}{2} \leq 2 \\ t(2) = 4 + a \geq 0 \end{cases}, \text{求得 } -4 \leq a \leq 4,$$

故选：D.

【标注】【知识点】对数型复合函数的性质

32. 2020~2021学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第14题4分 ★★

若函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$ 在区间 $(3m - 2, m + 2)$ 内单调递增，则实数 m 的取值范围为 _____.

【答案】 $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ **【解析】** 先保证对数有意义 $-x^2 + 4x + 5 > 0$ ，解得 $-1 < x < 5$ ，

又可得二次函数 $y = -x^2 + 4x + 5$ 的对称轴为 $x = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$ ，

由复合函数单调性可得函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$ 的单调递增区间为 $(2, 5)$ ，

要使函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x + 5)$ 在区间 $(3m - 2, m + 2)$ 内单调递增，

$$\text{只需 } \begin{cases} 3m - 2 \geq 2 \\ m + 2 \leq 5 \\ 3m - 2 < m + 2 \end{cases}, \text{即 } \begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m \leq 3 \\ m < 2 \end{cases},$$

解关于 m 的不等式组得 $\frac{4}{3} \leq m < 2$ ，

故答案为： $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ 。

【标注】【知识点】复合函数

33. 2018~2019学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末（六校联考）第4题4分 ★★

若函数 $f(x) = \log_{0.3}(5 + 4x - x^2)$ 在区间 $(a - 1, a + 1)$ 上单调递减，且 $b = \log_2 0.1$ ， $c = 2^{0.2}$ ，则 ()。

A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$ **【答案】** D**【解析】** 因为对数函数真数大于 0，

所以 $5 + 4x - x^2 > 0$ ，解得 $-1 < x < 5$ ，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 5)$ ，

设 $g(x) = 5 + 4x - x^2$, $x \in (-1, 5)$,

因为函数 $g(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$, 且图象开口向下,

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(2, 5)$, 单调递增区间为 $(-1, 2)$,

因为对数函数 $f(x)$ 的底数 $0.3 < 1$,

所以 $y = \log_{0.3} x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 2)$,

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(a-1, a+1)$ 上单调递减,

所以 $(a-1, a+1)$ 包括在函数 $f(x)$ 的递减区间内,

即 $\begin{cases} a-1 \geq -1 \\ a+1 \leq 2 \end{cases}$, 解得 $a \in [0, 1]$.

$b = \log_2 0.1 < 0$,

$c = 2^{0.2} > 2^0 = 1$,

所以 $b < a < c$.

故选 D.

【标注】【知识点】判断复合函数单调性；对数函数的图象及性质；指数函数的图象及性质；指对幂比较大小

对数函数与函数性质综合

34. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第16题4分 ★★★

若 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又有 $f(-2) = 0$, 则 $(\log_2 x - 1) \cdot f(\log_2 x - 1) < 0$ 的解集是 _____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 8)$

【解析】 根据题意, $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又有 $f(-2) = 0$,

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 且 $f(2) = 0$,

则在区间 $(-2, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上, $f(x) > 0$, 在区间 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, 2)$ 上, $f(x) < 0$,

对于 $(\log_2 x - 1) \cdot f(\log_2 x - 1) < 0$, 令 $t = \log_2 x - 1$,

则原不等式等价于 $tf(t) < 0$, 即 $\begin{cases} t > 0 \\ f(t) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t < 0 \\ f(t) > 0 \end{cases}$,

解可得: $0 < t < 2$ 或 $-2 < t < 0$,

又由 $t = \log_2 x - 1$, 则 $0 < \log_2 x - 1 < 2$ 或 $-2 < \log_2 x - 1 < 0$,

则有 $2 < x < 8$ 或 $\frac{1}{2} < x < 2$,

即不等式的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 8)$;

故答案为: $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 8)$.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

35. 2018~2019学年天津静海县静海县第一中学高一上学期期中第7题4分 ★★

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若实数 a 满足 $f(\log_3 a) < f(1)$, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $(3, +\infty)$

【答案】B

【解析】根据题意, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $f(\log_3 a) < f(1) \Rightarrow f(|\log_3 a|) < f(1) \Rightarrow |\log_3 a| < 1$,

即 $-1 < \log_3 a < 1$,

解可得: $\frac{1}{3} < x < 3$,

即 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$,

故选 B.

【标注】【知识点】利用函数单调性解不等式; 函数单调性与奇偶性综合问题

36. 2018~2019学年天津南开区天津市南开中学高一上学期期中第5题4分 ★

已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b - 2) = 0$, 则 $a + b = ()$.

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

【答案】D

【解析】 $\because f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$\therefore f(-x) + f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$,

$\therefore$ 函数为奇函数,

$\because x > 0$ 时, 函数为增函数,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为增函数,

$\because f(a) + f(b - 2) = 0$,

$\therefore f(a) = -f(b - 2) = f(2 - b)$,

$\therefore a = 2 - b$,

$\therefore a + b = 2$.

故选 A.

【标注】【知识点】利用定义判断函数奇偶性

37. 2018~2019学年天津河西区天津市实验中学高一上学期期中第9题3分 ★★★

已知函数 $f(x) = -\ln x^2 - |x|$, 则关于 m 的不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) < 2\left(\ln \frac{1}{2} - 1\right)$ 的解集为 () .

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
 B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$
 C. $(0, 2)$
 D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【答案】 B

【解析】 $f(-x) = -\ln(-x)^2 - |-x| = f(x)$,

故 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -2\ln x - x$ 为减函数,

$$\text{而 } 2 \left(\ln \frac{1}{2} - 1 \right) = f(2) ,$$

故 $f\left(\frac{1}{m}\right) < 2\left(\ln \frac{1}{2} - 1\right) = f(2)$,

故 $\left| \frac{1}{m} \right| > 2$, 解得: $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$.

故 $m \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

故选: B.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】利用函数单调性解不等式

【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

38. 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一上学期期中第9题4分 ★★

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{0.5} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的最小值是 ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because f(x)$ 是偶函数，

$\therefore f(\log_2 a) + f(\log_{0.5} a) \leq 2f(1)$, 等价于 $f(\log_2 a) + f(-\log_2 a) \leq 2f(1)$,

即 $2f(\log_2 a) \leq 2f(1)$,

即 $f(\log_2 a) \leq f(1)$,

即 $f(|\log_2 a|) \leq f(1)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数,

$$\therefore |\log_2 a| \leq 1,$$

即 $-1 \leq \log_2 a \leq 1$,

即 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$,
即 a 的最小值是 $\frac{1}{2}$,
故选 : A .

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题