

05基本不等式3

【金金备注】此讲题目难度稍大，但是部分题型属于必掌握内容，所以视学生情况选择题目进行讲解

换元法——加减常数

1. 已知实数 $a > 0$, $b > -2$, 且满足 $2a + b = 1$, 则 $\frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 - 2}{b + 2}$ 最小值是 _____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 - 2}{b + 2} \\ &= 2a + \frac{1}{a} + \frac{b^2 - 4 + 2}{b + 2} \\ &= 2a + \frac{1}{a} + (b - 2) + \frac{2}{b + 2} \\ &= 2a + b - 2 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \\ &= -1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & \because 2a + b = 1, \\ & \therefore 2a + (b + 2) = 3. \end{aligned}$$

又 $\because a > 0, b > -2$,

$$\begin{aligned} & \therefore b + 2 > 0, \\ & [2a + (b + 2)] \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \right) \\ &= 2 + 2 + \frac{b + 2}{a} + \frac{4a}{b + 2} \\ &\geq 8, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & \therefore 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \right) \geq 8, \\ & \therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \geq \frac{8}{3}, \\ & \therefore -1 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b + 2} \geq \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $b + 2 = 2a$ 时取得最小值.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

2. 已知 $ab > 0$, $a + b = 3$, 则 $\frac{b^2}{a + 2} + \frac{a^2}{b + 1}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 1.5

【解析】 原式 $= \left(\frac{b^2}{a + 2} + \frac{a^2}{b + 1} \right) [(a + 2) + (b + 1)] \times \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \left[b^2 + a^2 + \frac{a^2(a+2)}{b+1} + \frac{b^2(b+1)}{a+2} \right] \\
&\geq \frac{1}{6} [a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2}] \\
&= \frac{1}{6} (a+b)^2 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

3. 设正实数 x, y 满足 $x > \frac{1}{2}, y > 1$, 不等式 $\frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \geq m$ 恒成立, 则 m 的最大值为 ().
- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 16 D. 8

【答案】 D

【解析】 设 $y-1=b$, 则 $y=b+1$, 令 $2y-1=a$, $y=\frac{1}{2}(a+1)$, $a>0, b>0$.

$$\begin{aligned}
&\text{那么: } \frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \\
&= \frac{(b+1)^2}{\frac{a}{b}} + \frac{(a+1)^2}{b} \\
&\geq 2 \frac{(a+1)(b+1)}{\sqrt{ab}} \\
&= 2 \frac{ab + (a+b) + 1}{\sqrt{ab}} \\
&= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \sqrt{ab} + \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \right) \\
&\geq 2 \left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} + \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \right) \\
&= 2(2+2) \\
&= 8 \text{ (当且仅当 } a=b=1 \text{)}, \\
&\text{即 } x=2, y=1 \text{ 时取等号.} \\
&\therefore \frac{4x^2}{y-1} + \frac{y^2}{2x-1} \text{ 的最小值为 } 8. \\
&\text{故选 D.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；二元不等式链的应用；利用基本不等式证明其它不等式

4. 设 $a, b > 0, a+b=5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 方法一： $a > 0, b > 0, a+b=5$,

故 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3} = \sqrt{a+1} + \sqrt{8-a} (0 < a < 5)$,

根据均值不等式 $\sqrt{a+1} + \sqrt{8-a} \leq 2\sqrt{\frac{(\sqrt{a+1})^2 + (\sqrt{8-a})^2}{2}} = 3\sqrt{2}$,
当且仅当 $a+1 = 8-a$ 时等号成立 $a = \frac{7}{2}$,

故答案为 $3\sqrt{2}$.

方法二:

$$(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3})^2 = a+b+4+2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+3} \leq 9+2 \cdot \frac{(\sqrt{a+1})^2 + (\sqrt{b+3})^2}{2} = 9+a+b+4=18$$

所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3} \leq 3\sqrt{2}$, 当且仅当 $a+1 = b+3$, $a+b=5$,

即 $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ 时等号成立.

所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 最大值为 $3\sqrt{2}$.

$$\text{方法三: } \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+1+b+3}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当 $\sqrt{a+1} = \sqrt{b+3}$, $a+b=5$,

即 $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ 时等号成立,

所以 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 最大值为 $3\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件

5. 已知 x, y 都是非负实数, 且 $x+y=2$, 则 $\frac{8}{(x+2)(y+4)}$ 的最小值为 ().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】 B

【解析】 $\because x, y$ 都是非负实数, 且 $x+y=2$, $\therefore x+2+y+4=8 \therefore 8 \geq 2\sqrt{(x+2)(y+4)}$,

化为: $\frac{1}{(x+2)(y+4)} \geq \frac{1}{16}$, 当且仅当 $x=2, y=0$ 时取等号, 则

$$\frac{8}{(x+2)(y+4)} \geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}. \text{ 其最小值为 } \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

【素养】 数学运算

基本配凑法

6. 设正实数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 a^2+b^2 最小值是 _____, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 最大值是 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}; \sqrt{2}$

【解析】 根据题意, 若正实数 a, b 满足 $a+b=1$,

则有 $1 = a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$,

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \geq \frac{1}{2},$$

即 $a^2 + b^2$ 最小值是 $\frac{1}{2}$,

对于 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, 有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 2$,

则有 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$,

则 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 最大值是 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件

7. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值为 _____.

【答案】 2

【解析】 $\because x^2 + y^2 - xy = 1$,

$$\therefore x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 3xy,$$

$$\therefore (x+y)^2 = 1 + 3xy \leq 1 + 3 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

$$\therefore \frac{1}{4}(x+y)^2 \leq 1,$$

$$\therefore (x+y)^2 \leq 4,$$

$$\therefore x+y \leq 2,$$

当且仅当 $x = y = 1$ 时取得.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；利用基本不等式求最值

8. 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + 4 + 4ab + 4b^2}{a + 2b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 4

$$\text{【解析】 } \frac{a^2 + 4 + 4ab + 4b^2}{a + 2b} = \frac{(a + 2b)^2 + 4}{a + 2b}$$

$$= a + 2b + \frac{4}{a + 2b},$$

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore (a + 2b) + \frac{4}{a + 2b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a + 2b} \cdot (a + 2b)} = 4,$$

当且仅当 $a + 2b = 2$ 时, 等号成立.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

9. 设 $x > 0, y > 0$, 且 $\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x}$, 则当 $x + \frac{1}{y}$ 取最小值时, $x^2 + \frac{1}{y^2} =$ _____.

【答案】 12

【解析】 $\because x > 0, y > 0,$

$\therefore$ 当 $x + \frac{1}{y}$ 取最小值时, $\left(x + \frac{1}{y}\right)^2$ 取最小值,

$$\therefore \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y}, \quad \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x},$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{2x}{y} + \frac{16y}{x},$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{4x}{y} + \frac{16y}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{16y}{x}} = 16$$

$$\therefore x + \frac{1}{y} \geq 4,$$

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{16y}{x}$ 即 $x = 2y$ 时取等号,

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y} = 16,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{2 \cdot 2y}{y} = 16,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{y^2} = 16 - \frac{2 \cdot 2y}{y} = 12,$$

故答案为: 12.

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用

10. 若 $x < 0$, 则函数 $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}$ 的最小值是 ().

A. $\frac{9}{4}$

B. 0

C. 2

D. 4

【答案】 D

【解析】 设 $A = x + \frac{1}{x},$

$$\because x < 0,$$

$$\therefore -x > 0,$$

$$\therefore -x - \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} \leq -2,$$

$$\therefore A \leq -2,$$

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= A^2 - A - 2$$

$$= \left(A - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4.$$

故选D.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；基本不等式的概念；利用基本不等式求最值；定轴定区间求值域

11. 已知 $a > b$ ，二次三项式 $ax^2 + 2x + b \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立，又 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ ，使 $ax_0^2 + 2x_0 + b = 0$ 成立，则 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值为 _____。

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 $\because ax^2 + 2x + b \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立，

又 $\because \exists x_0 \in \mathbf{R}$ ，使 $ax_0^2 + 2x_0 + b = 0$ 成立，

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases},$$

$$\therefore 4 - 4ab = 0,$$

$$\therefore ab = 1,$$

$$\therefore a > b,$$

$$\therefore a - b > 0,$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{a - b}$$

$$= a - b + \frac{2}{a - b} \geq 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $a - b = \sqrt{2}$ 时取得最小值。

故答案为： $2\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；利用基本不等式求最值

12. 若正实数 a, b 满足 $(2a + b)^2 = 1 + 6ab$ ，则 $\frac{ab}{2a + b + 1}$ 的最大值为（ ）。
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 $(2a + b)^2 - 1 = 6ab \Rightarrow (2a + b + 1)(2a + b - 1) = 6ab$ ，

$$\text{即 } \frac{ab}{2a + b + 1} = \frac{2a + b - 1}{6},$$

$$6ab = 3 \times 2a \times b \leq 3 \left(\frac{2a + b}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}(2a + b)^2,$$

等号成立的条件为 $2a = b$ ，

$$\text{原式整理为 } (2a + b)^2 \leq 1 + \frac{3}{4}(2a + b)^2,$$

$$\text{即 } (2a + b)^2 \leq 4,$$

$$\text{得 } 0 < 2a + b \leq 2,$$

$$\text{故 } \frac{ab}{2a + b + 1} = \frac{2a + b - 1}{6} \leq \frac{2 - 1}{6} = \frac{1}{6},$$

所以 $\frac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值是 $\frac{1}{6}$.

故选A .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件

升级配凑法

13. 若 a, b 均为正实数, 则 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】方法一： $\because a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{b^2}{2}} = \sqrt{2}ab$, 当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时取等号,

$\frac{1}{2}b^2 + 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = \sqrt{2}b$, 当且仅当 $b = \sqrt{2}$ 时取等号,

$\therefore \frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{ab+b}{a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 1^2} \leq \frac{ab+b}{\sqrt{2}ab + \sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当 $a = 1$

, $b = \sqrt{2}$ 时取等号,

故 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法二： $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{a+1}{b + \frac{a^2+1}{b}} \leq \frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}}$, 当且仅当 $b = \frac{a^2+1}{b}$ 时等号成立.

$\frac{a+1}{2\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当 $a = 1$ 时等号成立.

则当 $a = 1, b = \sqrt{2}$ 时, 最大值为 $\sqrt{2}$.

方法三： $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 + \frac{1}{b^2}}$.

令 $x = \frac{a}{b}, y = \frac{1}{b}$.

则原式

$$= \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \leq \frac{x+y}{\frac{(x+y)^2}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{x+y}{2} + \frac{1}{(x+y)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{1}{(x+y)}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

当且仅当 $\begin{cases} x=y \text{ 即 } \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \\ \frac{x+y}{2} = \frac{1}{x+y}, \text{ 即 } \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)^2 = 2 \end{cases}$. 等式成立 .

解得： $a = 1, b = \sqrt{2}$.

故 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

14. 若 $a, b > 0$, 且 $b > 2a$, 则 $\frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2}$ 的最小值为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 由 $a, b > 0$ 且 $b > 2a$ 得 $\frac{b}{a} > 2$,

令 $t = \frac{b}{a} (t > 2)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2} &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{b}{a} + 1}{\frac{b}{a} - 2} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} \\ &= \frac{(t-2)^2 + 2(t-2) + 1}{t-2} = t - 2 + \frac{1}{t-2} + 2, \end{aligned}$$

$\because t > 2$,

$\therefore t - 2 > 0$,

$$\therefore t - 2 + \frac{1}{t-2} + 2 \geq 2\sqrt{(t-2) \cdot \frac{1}{t-2}} + 2 = 4,$$

当且仅当 $t - 2 = \frac{1}{t-2}$, 即 $t = 3$ 时, 等号成立, 则 $\frac{b^2 - 2ab + a^2}{ab - 2a^2}$ 的最小值为 4.

故选: D.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件

15. 已知实数 $x, y > 0$ 且 $xy = 2$, 则 $\frac{x^3 + 8y^3}{x^2 + 4y^2 + 8}$ 的最小值是 _____ .

【答案】 1

【解析】 设 $x + 2y = t$,

$\because$ 实数 $x, y > 0$ 且 $xy = 2$,

$\therefore t \geq 2\sqrt{2xy} = 4$, 当且仅当 $x = 2y = 2$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{x^3 + 8y^3}{x^2 + 4y^2 + 8} &= \frac{(x+2y)[(x+2y)^2 - 4xy - 2xy]}{(x+2y)^2 - 4xy + 8} \\ &= \frac{t(t^2 - 12)}{t^2 - 12} \\ &= t - \frac{12}{t} \\ &= f(t) \\ &\geq 4 - \frac{12}{4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$\therefore \frac{x^3 + 8y^3}{x^2 + 4y^2 + 8}$ 的最小值是 1 .

故答案为 : 1 .

【标注】【知识点】用换元法求值域 ; 利用基本不等式求最值

16. 已知 $a, b > 0$, 且满足 $a^2 + ab = 1$, 则 $3a + b$ 的最小值为 () .

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 $\because a^2 + ab = 1$,

$$\therefore a(a+b) = 1 ,$$

$$\therefore 2a(a+b) = 2 ,$$

$$\text{又} \because 2a(a+b) \leq \left(\frac{2a+a+b}{2} \right)^2 ,$$

$$\therefore 2 \leq \left(\frac{3a+b}{2} \right)^2 ,$$

$$\because a, b > 0 ,$$

$$\therefore \frac{3a+b}{2} > 0 ,$$

$$\therefore \frac{3a+b}{2} \geq \sqrt{2} ,$$

$$\therefore 3a+b \geq 2\sqrt{2} ,$$

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得最小值 .

故选 C .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

消元法

17. 已知正数 x, y 满足 $x^2 + 2xy - 3 = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值是 _____ .

【答案】 3

【解析】 $\because x^2 + 2xy - 3 = 0$,

$$\therefore y = \frac{3-x^2}{2x} ,$$

$$\therefore 2x + y = 2x + \frac{3-x^2}{2x} = \frac{3x^2+3}{2x} = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{3x}} = 3 ,$$

当且仅当 $\frac{3x}{2} = \frac{3}{2x}$ 即 $x = 1$ 时取等号 ,

故答案为 3 .

【标注】【知识点】基本不等式的概念

18. 已知 x, y 为正实数, 且 $xy + 2x + 4y = 41$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____ .

【答案】 8

【解析】 因为 x, y 为正实数, 且 $xy + 2x + 4y = 41$,

$$\text{所以 } x = \frac{41 - 4y}{y + 2},$$

所以

$$x + y = y + \frac{41 - 4y}{y + 2} = \frac{-4(y + 2) + 49}{y + 2} + y = -6 + \frac{49}{y + 2} + y + 2 \geq -6 + 2\sqrt{\frac{49}{y + 2} \cdot (y + 2)} = 8$$

.

当且仅当 $y + 2 = \frac{49}{y + 2}$ 即 $y = 5, x = 3$ 时取等号, 此时 $x + y$ 取得最小值8.

故答案为: 8.

【标注】 【素养】 数学运算; 逻辑推理

【知识点】 已知等式关系求最值

19. 已知正实数 a, b 满足 $ab = a + 2$, 那么 $2a + b$ 的最小值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 根据题意, 正实数 a, b 满足 $ab = a + 2$, 则 $b = 1 + \frac{2}{a}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } 2a + b &= 2a + 1 + \frac{2}{a} \\ &= 2a + \frac{2}{a} + 1 \\ &\geq 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 1 \\ &\geq 2 \times 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} + 1 \\ &= 5, \end{aligned}$$

即 $2a + b$ 的最小值为5.

故答案为: 5.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

 直接使用

20. 若 x, y 是正数, 则 $\left(x + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值为 ()

A. 3

B. $\frac{7}{2}$

C. 4

D. $\frac{9}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\left(x + \frac{1}{2y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2x}\right)^2 = x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{4y^2} + y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{4x^2}$
 $= x^2 + \frac{1}{4x^2} + y^2 + \frac{1}{4y^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
 $\geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} + 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{1}{4y^2}} + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}$
 $= 1 + 1 + 2 = 4.$

当且仅当 $x^2 = \frac{1}{4x^2}$ 且 $y^2 = \frac{1}{4y^2}$ 且 $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ 时“=”成立，即 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时。

∴最小值为4。

故选C。

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；利用基本不等式求最值

21. 若 $m > n > 0$ ，则 $m^2 + \frac{1}{(m-n)n}$ 的最小值为 _____。

【答案】 4

【解析】 ∵ $m > n > 0$ ，则

$$m^2 + \frac{1}{(m-n)n} \geq m^2 + \frac{1}{\left(\frac{m-n+n}{2}\right)^2} = m^2 + \frac{4}{m^2} \geq 2\sqrt{m^2 \cdot \frac{4}{m^2}} = 4, \text{ 当且仅当}$$

$m = \sqrt{2}, n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号。

∴ $m^2 + \frac{1}{(m-n)n}$ 的最小值为4。

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；基本不等式成立的条件；利用基本不等式求最值

22. 已知 $a > b > 0$ ，则 $a^2 + \frac{16}{b(a-b)}$ 的最小值为 _____。

【答案】 16

【解析】 ∵ $a > b > 0$ ，

∴ $a - b > 0$ ，

$$b(a-b) \leq \left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$\therefore a^2 + \frac{16}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{64}{a^2} \geq 2\sqrt{64} = 16,$$

当 $b = a - b$ 且 $a^2 = 8$ 时。

即 $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ 时“=”取得。

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

 通分型

23. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为().

A. 1

B. 6

C. 9

D. 16

【答案】 B

【解析】 $\because$ 正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \therefore a > 1$, 且 $b > 1$,
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 变形为 $\frac{a+b}{ab} = 1, \therefore ab = a+b, \therefore ab - a - b = 0, \therefore (a-1)(b-1) = 1, \therefore$
 $a-1 = \frac{1}{b-1},$
 $\because a-1 > 0, \therefore \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = \frac{1}{a-1} + 9(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot 9(a-1)} = 6,$
 当且仅当 $\frac{1}{a-1} = 9(a-1)$, 即 $a = 1 \pm \frac{1}{3}$ 时取“=”(由于 $a > 1$, 故取 $a = \frac{4}{3}$),
 $\therefore \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为6.
 故选B.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

 数化为式

24. 已知 $a > 0, b > 0, a + 2b = 1$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3a+1}{b}$ 的最小值为().

A. 8

B. 6

C. 12

D. 9

【答案】 C

【解析】 $\because a + 2b = 1,$
 $\therefore \frac{2}{a} + \frac{3a+1}{b} = \frac{2a+4b}{a} + \frac{3a+a+2b}{b}$
 $= 2 + \frac{4b}{a} + \frac{4a}{b} + 2$
 $\geq 4 + 8 = 12,$
 当 $a = b = \frac{1}{3}$ 时, 取得最小值.
 故选C.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

 三项

25. 已知 $x > y > z$, 若 $\frac{1}{x-y} + \frac{4}{y-z} \geq \frac{n}{x-z}$ 恒成立, 则 n 的最大值为().

A. 3

B. 4

C. 9

D. 16

【答案】C

【解析】 $\frac{1}{x-y} + \frac{4}{y-z} \geq \frac{n}{x-z}$ 恒成立，且 $x > y > z$ ，
即 $n \leq \frac{x-z}{\frac{1}{x-y} + \frac{4}{y-z}}$ 恒成立，
 $\therefore n \leq \left(\frac{x-z}{\frac{1}{x-y} + \frac{4}{y-z}} \right)_{\min}$ ，
 $\frac{x-z}{\frac{1}{x-y} + \frac{4}{y-z}} = \frac{(x-z)(y-z) + 4(x-z)(x-y)}{(x-y)(y-z)}$ ，
令 $x-y=a$ ， $y-z=b$ ，则 $a > 0$ ， $b > 0$ ，
原式可化为 $\frac{(a+b) \cdot b + 4(a+b) \cdot a}{ab}$
 $= \frac{(a+b)(4a+b)}{ab}$
 $= \frac{4a^2 + b^2 + 5ab}{ab}$
 $\geq \frac{2 \times 2a \cdot b + 5ab}{ab}$
 $= 9$ ，
当且仅当 $2a=b$ 时，取得最小值，
 $\therefore n \leq 9$ ，
即 n 的最大值为 9。
故选 C。

【标注】【方法】换元法

【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】利用基本不等式求最值；不等式中的恒成立与能成立问题