

04基本不等式2练习题

1. 一个参数的均值考查形式

 直接使用基本不等式

1. 已知命题 $P: \forall x > 0, \frac{1}{x} + 2x > m - 1$ 恒成立是真命题, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $m < 2\sqrt{2} + 1$

【解析】 由题意得 $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)_{\min} > m - 1$
设 $g(x) = \frac{1}{x} + 2x$
由基本不等式得 $\frac{1}{x} + 2x \geq 2\sqrt{2}$
且仅当 $\frac{1}{x} = 2x$ 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 取得等号,
 $\therefore m - 1 < 2\sqrt{2}$ 即 $m < 2\sqrt{2} + 1$.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值; 基本不等式的概念

2. 当 $x =$ _____ 时, $x^2(4 - x^2)(-2 < x < 0)$ 的最大值是 _____ .

【答案】 $-\sqrt{2}; 4$

【解析】 $\because -2 < x < 0$,
 $\therefore 0 < x^2 < 4, 4 - x^2 > 0$,
 $\therefore x^2(4 - x^2) \leq \left(\frac{x^2 + 4 - x^2}{2}\right)^2 = 4$,
当且仅当 $x^2 = 4 - x^2$, 即 $x = -\sqrt{2}$ 时等号成立.
故答案为: $-\sqrt{2}; 4$.

【标注】 【知识点】 利用基本不等式求最值

3.

函数 $y = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 3}}$ 的最小值是 _____

【答案】 (1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】 (1) 略

【标注】【知识点】用换元法求值域

2. 两个参数的均值考查形式

 直接使用

4. 已知不等式 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right) \geq 4$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 ().
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

【答案】A

【解析】 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{y}\right)$
 $= 1 + \frac{ax}{y} + \frac{y}{x} + a$
 $\geq 2\sqrt{a} + a + 1,$
 $\therefore 2\sqrt{a} + a + 1 \geq 4,$
 $a + 2\sqrt{a} - 3 \geq 0,$
 $(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 1) \geq 0,$
即 $\sqrt{a} \leq -3$ (舍) 或 $\sqrt{a} \geq 1,$
解得 $a \geq 1,$
 a 的最小值为 1.
故选 A.

【标注】【知识点】基本不等式与恒成立问题

5. 已知 $x > 0, y > 0$. 若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ____.

【答案】 $(-4, 2)$

【解析】解: $\because x > 0, y > 0 \therefore \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \geq 8$ (当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{8x}{y}$ 时取“=”).
若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则 $m^2 + 2m < 8$, 解得 $-4 < m < 2$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

 统一和、积形式

6. 已知 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $a + b = 4$, 则 ().

A. $ab \leq 3$

B. $ab \geq 5$

C. $a^2 + b^2 \geq 8$

D. $a^2 + b^2 \leq 12$

【答案】 C

【解析】 $\because a \geq 0, b \geq 0,$

$$\therefore 4 = a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore ab \leq 4,$$

$$\text{由柯西不等式知 } (a^2 + b^2)(1 + 1) \geq (a + b)^2 = 4^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 8,$$

故C.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念；二元不等式链的应用

7. 已知正数 x, y 满足等式 $x + y - 2xy + 4 = 0$, 则 ().

A. xy 的最大值是2, 且 $x + y$ 的最小值为4.

B. xy 的最小值是4, 且 $x + y$ 的最大值为4.

C. xy 的最大值是2, 且 $x + y$ 的最大值为4.

D. xy 的最小值是4, 且 $x + y$ 的最小值为4.

【答案】 D

【解析】 $\because x > 0, y > 0,$

$$2xy - 4 = x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

$$\therefore xy - \sqrt{xy} - 2 \geq 0,$$

$$\therefore (\sqrt{xy} - 2)(\sqrt{xy} + 1) \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{xy} \geq 2,$$

$$\therefore xy \geq 4,$$

$\therefore xy$ 的最小值为4,

$$x + y + 4 = 2xy \leq \frac{(x + y)^2}{2},$$

$$\therefore (x + y)^2 \geq 2(x + y) + 8,$$

$$\therefore (x + y)^2 - 2(x + y) - 8 \geq 0,$$

$$(x + y - 4)(x + y + 2) \geq 0,$$

$$\therefore x + y \geq 4,$$

$\therefore x + y$ 的最小值为4.

【标注】 【知识点】 一元二次不等式；基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

8. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $ab - a - b \geq 1$, 则有 () .

A. $a + b \geq 2(\sqrt{2} + 1)$

B. $a + b \leq \sqrt{2} + 1$

C. $a + b < \sqrt{2} + 1$

D. $a + b > 2(\sqrt{2} + 1)$

【答案】 A

【解析】 $\because ab - a - b \geq 1$,

$$\therefore a + b + 1 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4},$$

$$\therefore (a+b)^2 - 4(a+b) - 4 \geq 0,$$

$$\therefore [a+b - (2+2\sqrt{2})][a+b - (2-2\sqrt{2})] \geq 0,$$

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$a+b - (2-2\sqrt{2}) > 0,$$

$$\therefore a+b \geq 2+2\sqrt{2}.$$

故A.

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】利用基本不等式证明其它不等式

9. 设 $x > 0$, $y > 0$, 且 $xy - (x+y) = 1$, 则 $x+y$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $2+2\sqrt{2}$

【解析】 $\because xy - (x+y) = 1$,

$$\text{得} \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - (x+y) \geq 1,$$

$$\text{解得} x+y \geq 2+2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

10. 已知 $a, b > 0$, 且 $ab = a + b + 3$.

求 ab 的取值范围.

【答案】 (1) $ab \geq 9$.

【解析】 (1) $\because a, b > 0$,

$$\text{又} \because ab = a + b + 3,$$

$$\therefore ab - 3 = a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore (\sqrt{ab})^2 - 2\sqrt{ab} - 3 \geq 0,$$

$$(\sqrt{ab} - 3)(\sqrt{ab} + 1) \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{ab} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{ab} \geq 3,$$

$$\therefore ab \geq 9, \text{ 当且仅当 } a = b = 3 \text{ 时取得最小值.}$$

【标注】【知识点】二元不等式链的应用；利用基本不等式求最值

11. 已知 $a > 0, b > 0$.

若 $a + 2b + 2ab = 8$, 求 $a + 2b$ 的最小值.

【答案】 (1) 4.

【解析】 (1) $\because a + 2b + 2ab = 8$,

$$\therefore 2ab = 8 - (a + 2b),$$

$$\text{又} \because 2ab \leq \frac{(a + 2b)^2}{4},$$

$$\therefore \frac{(a + 2b)^2}{4} \geq 8 - (a + 2b),$$

$$\therefore (a + 2b)^2 + 4(a + 2b) - 32 \geq 0,$$

$$\therefore (a + 2b + 8)(a + 2b - 4) \geq 0,$$

$$\text{又} \because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a + 2b \geq 4.$$

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

1的代换

12. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y = 1$, 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > m^2 - 3m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ().

A. $(-1, 4)$

B. $(-4, 1)$

C. $(-2, 1)$

D. $[-1, 4]$

【答案】 A

【解析】 $\because \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > m^2 - 3m$ 恒成立,

$$\therefore m^2 - 3m < \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)_{\min},$$

$$\because x > 0, y > 0,$$

$$\therefore (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$\geq 2 + 2$$

$$\begin{aligned}
&= 4, \\
&\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4, \\
&\text{当且仅当 } x = y = \frac{1}{2} \text{ 时取得,} \\
&\therefore m^2 - 3m < 4, \\
&\therefore m^2 - 3m - 4 < 0, \\
&\therefore (m-4)(m+1) < 0, \\
&\therefore -1 < m < 4. \\
&\text{故选 A.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】基本不等式与恒成立问题

13. 已知 $a > 0, b > 0, \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$, 若不等式 $2a + b \geq 9m$ 恒成立, 则 m 的最大值是 _____.

【答案】6

【解析】 $\because a > 0, b > 0$,
 又 $\because 2a + b \geq 9m$ 恒成立,
 $\therefore 9m \leq (2a + b)_{\min}$,
 $(2a + b) \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) = 4 + 1 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 9$,
 $\therefore 2a + b \geq 54$,
 当且仅当 $a = b$ 时, 取得最小值,
 $\therefore 9m \leq 54$,
 $\therefore m \leq 6$,
 $\therefore m_{\max} = 6$.

【标注】【知识点】基本不等式与恒成立问题

14. 已知两个正实数 x, y 满足 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 且恒有 $x + 2y > m^2 + 7m$, 则实数 m 的取值范围 _____.

【答案】 $(-8, 1)$

【解析】 $\because x > 0, y > 0$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$,
 $\therefore x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right)$
 $= 4 + \frac{x}{y} + \frac{4y}{x} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} = 8$
 当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$ 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 即 $y = 2, x = 4$ 时取最小值 8.
 $\therefore x + 2y > m^2 + 7m$,

$$\therefore 8 > m^2 + 7m ,$$

解可得 , $-8 < m < 1$.

故答案为 : $(-8, 1)$.

【标注】【知识点】倒数和形式；利用基本不等式求最值；基本不等式的概念