

03基本不等式1

1. 基本不等式的来源及常见形式

1. 算术平均数与几何平均数

对于给定的两个正数 a, b

算术平均数：_____

几何平均数：_____

【备注】 【答案】 算术平均数： $\frac{a+b}{2}$ ；几何平均数： $\sqrt{ab}$

2. 均值不等式/基本不等式（均值定理）

①语言表述：两个正实数的算术平均数 不小于 它们的几何平均数

②公式表述：设 $a, b > 0$,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ，即 $a = b$ 时，等号成立。

【备注】 【教师备注】进一步，我们可以由基本不等式得到如下的结论：

（1）两个正数的积为常数时，它们的和有最小值；

（2）两个正数的和为常数时，它们的积有最大值。

3. 正数形式

如果 a, b 是正数，那么_____，当且仅当 $a = b$ 时，有等号成立。

此结论又称**均值不等式**或**基本不等式**。

【备注】 【答案】 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

4. 负数形式

如果 a, b 都为负数时，_____。当且仅当 $a = b$ 时，有等号成立。

【备注】 【答案】 $a + b \leq -2\sqrt{ab}$

5. 常用乘积形式

【备注】 【答案】 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

6. 均值不等式需要注意三个方面：

一正二定三相等

【备注】【教师备注】

“一正”：不等式中的各项必须都是正数，在异号时不能运用均值不等式，在同负时可以先进行转化，再运用均值不等式；

“二定”：求积 xy 最大值时，应看和 $x+y$ 是否是定值；求和 $x+y$ 最小值时，看 xy 是否为定值。

“三相等”：只有具备了均值不等式中等号成立的条件，才能使代数式取到最大或最小值。否则不能通过均值不等式求最值。

$$\text{一般结论：} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

即：平方平均数 $\geq$ 算术平均数 $\geq$ 几何平均数 $\geq$ 调和平均数

2. 一个参数的均值考查形式

形如 $y = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) **对勾函数模型**
 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 的性质和图象：

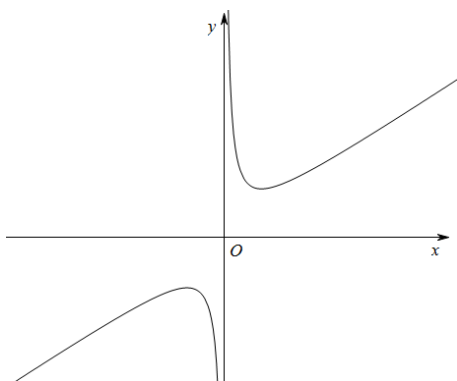
①定义域：_____

②值域：_____

③单调性：_____

④奇偶性：_____

⑤图象：



【备注】【答案】①定义域： $\{x|x \neq 0\}$

②值域： $(-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$

③单调性：在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})$, $(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上单调递增；在

$(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 上单调递减

④奇偶性：奇函数

 直接套用基本不等式

【备注】【教师备注】一个参数的问题相对比较容易，大多数都是直接使用基本不等式或者是分式型不等式，注意条件和换元就可以了

1. 已知 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 (x < 0)$ ，则 $f(x)$ 有最 _____ 值为 _____ .

【答案】 大；-4

【解析】 $\because x < 0$,

$$\therefore -x > 0,$$

$$\therefore (-x) + \left(\frac{1}{-x}\right) \geq 2\sqrt{(-x)\left(\frac{1}{-x}\right)} = 2,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} \leq -2,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} - 2 \leq -4,$$

$$\therefore f(x) \text{ 有最大值为 } -4,$$

当且仅当 $x = -1$ 时取得最大值 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

2. 解答下列各题：

(1) 若 $x > 0$ ，求 $f(x) = \frac{12}{x} + 3x$ 的最小值 .

(2) 若 $x < 0$ ，求 $f(x) = \frac{12}{x} + 3x$ 的最大值 .

【答案】 (1) 12 .

(2) -12 .

【解析】 (1) $\because x > 0$,

$$\therefore f(x) = 3x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{12}{x}} = 12,$$

当 $x = 2$ 时“=”取得 .

(2) $\because x < 0$,

$$\therefore -3x > 0, -\frac{12}{x} > 0,$$

$$\therefore -3x - \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{36} = 12,$$

$$\therefore 3x + \frac{12}{x} \leq -12,$$

当 $x = -2$ 时“=”取得 .

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

3. 已知实数 $x > 0$, 则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是 _____ .

【答案】 $2 - 4\sqrt{3}$

【解析】 $\because x > 0$,

$$\therefore 3x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} ,$$

$$\therefore -3x - \frac{4}{x} \leq -4\sqrt{3} ,$$

$$\therefore 2 - 3x - \frac{4}{x} \leq 2 - 4\sqrt{3} ,$$

当且仅当 $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 时取得最大值 .

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值

4. 设 $0 < x < 2$, 求函数 $f(x) = \sqrt{3x(8-3x)}$ 的最大值 , 并求相应的 x 值 .

【答案】 当 $x = \frac{4}{3}$ 时取得最大值 4 .

【解析】 $\because 0 < x < 2$,

$$\therefore 8 - 3x > 0 ,$$

$$3x \cdot (8 - 3x) \leq \left(\frac{3x + 8 - 3x}{2} \right)^2 = 16 ,$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3x(8-3x)} \leq \sqrt{16} = 4 ,$$

当 $3x = 8 - 3x$ 即 $x = \frac{4}{3}$ 时“=”取得 .

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值 ; 基本不等式的实际应用



配凑法 (加減常数)

5. 求下列函数的最值 .

求函数 $y = 2x + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值 .

【答案】 (1) $2\sqrt{2} + 2$

【解析】 (1) $\because x > 1$,

$$\therefore x - 1 > 0 ,$$

$$2x + \frac{1}{x-1}$$

$$= 2x - 2 + \frac{1}{x-1} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{2} + 2 ,$$

当且仅当 $x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得最小值 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；倒数和形式

6. 若 $x > -1$, 则函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 取最小值时对应的 x 的值为 _____ .

【答案】 0

【解析】 $y = x + \frac{1}{x+1}$
 $= x + 1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2 - 1$
 $= 1$.
当且仅当 $x + 1 = \frac{1}{x+1}$ 即 $x = 0$ 时等号成立 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

【素养】逻辑推理；数学运算

7. 若 $x > 1$, 则 $1 + 4x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值是 _____ , 此时 $x =$ _____ .

【答案】 $9; \frac{3}{2}$

【解析】 $\because x > 1$,
 $\therefore 1 + 4x + \frac{1}{x-1} = 4(x-1) + \frac{1}{x-1} + 5 \geq 2\sqrt{4(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 5 = 9$,
当且仅当 $4(x-1) = \frac{1}{x-1}$ 时等号成立 ,
解得 $x = \frac{3}{2}$ 或 $x = \frac{1}{2}$ (舍去) ,
 $\therefore x > 1$, $1 + 4x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值为 9 , 此时 $x = \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

8. 已知函数 $f(x) = 2x + \frac{2}{x+1}$.
若 $x \in (-1, +\infty)$, 求 $f(x)$ 的最小值 , 并指出此时 x 的值 .

【答案】 (1) 2 , $x = 0$.

【解析】 (1) $\because x \in (-1, +\infty)$,
 $\therefore x + 1 > 0$,
 $f(x) = 2x + \frac{2}{x+1}$
 $= 2(x+1) + \frac{2}{x+1} - 2$

$$\geq 2\sqrt{4} - 2 = 2,$$

当 $x+1=1$ 时, 即 $x=0$ 时取得最大值.

【标注】【知识点】分式不等式; 配凑法求最值; 利用基本不等式求最值

9. 已知函数 $y = x - 4 + \frac{9}{x+1}$ ($x > -1$), 当 $x = a$ 时, y 取得最小值 b , 则 $a + b = (\quad)$.
- A. -3 B. 2 C. 3 D. 8

【答案】 C

【解析】 $\because x > -1,$

$$\therefore x+1 > 0,$$

$$\begin{aligned}\therefore y &= x - 4 + \frac{9}{x+1} \\ &= (x+1) + \frac{9}{x+1} - 5 \\ &\geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{9}{x+1}} - 5 \\ &= 1,\end{aligned}$$

当且仅当 $x = 2$ 时取等号.

$$\therefore a = 2, b = 1,$$

$$\therefore a + b = 3.$$

故选C.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 基本不等式成立的条件; 利用基本不等式求最值

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}+2}$, 则 $f(x)$ 的最小值为 ____.

【答案】 4

$$\begin{aligned}\text{【解析】 } f(x) &= \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}+2} \\ &= \sqrt{x} + 2 + \frac{9}{\sqrt{x}+2} - 2 \\ &\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{9}{\sqrt{x}+2}} - 2 \\ &= 6 - 2 \\ &= 4,\end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } \sqrt{x} + 2 = \frac{9}{\sqrt{x}+2}$$

即 $x = 1$ 时取等,

故答案为: 4.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件；基本不等式的概念；利用基本不等式求最值
【素养】数学运算

 分式型——二次比一次

11. 已知 $t > 0$ ，则函数 $y = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 -2

【解析】 $t > 0$ ， $y = \frac{t^2 - 4t + 1}{t} = t - 4 + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 4 = -2$ ，
当且仅当 $t = 1$ 时取得最小值-2 .
故答案为：-2 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用

12. 已知 $x > 2$ ，求 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$ 的最小值 .

【答案】 1 .

【解析】 设 $A = x - 2$ ，
 $\because x > 2$ ，
 $\therefore x - 2 > 0$ ，
即 $A > 0$ ，
$$y = \frac{(A+2)^2 - 4(A+2) + 5}{2A} = \frac{A^2 + 4A + 4 - 4A - 3}{2A}$$
$$= \frac{A^2 + 1}{2A} = \frac{A}{2} + \frac{1}{2A} \geq 2\sqrt{\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2A}} = 1 .$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

13. 设 $x < 1$ ，则 $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $(-\infty, -1]$

【解析】 令 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ ， $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$ ，
当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，
当 $x \in (0, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ，
 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增，在 $(0, 1)$ 递减，
 $\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -1]$.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

【知识点】用分离常数法求值域

【方法】分离常数法

14. 解答下列问题：

求函数 $y = \frac{ax^2 + x + 1}{x + 1}$ ($x > -1$ 且 $a > 0$) 的最小值.

【答案】(1) 1.

【解析】(1) 法一：

$$y = \frac{ax^2 + x + 1}{x + 1} = ax + \frac{1 - ax + x}{x + 1} = ax + (1 - a) + \frac{a}{x + 1} = a(x + 1) + \frac{a}{x + 1} + 1 - 2a$$

$$\because x > -1, a > 0, \therefore a(x + 1) > 0, \frac{a}{x + 1} > 0$$

$$\therefore \text{上式} \geq 2a + 1 - 2a = 1,$$

当且仅当 $a(x + 1) = \frac{a}{x + 1}$, 即 $x = 0$ 或 $x = -2$ (舍去) 时等号成立,

$$\therefore y_{\min} = 1.$$

法二：

令 $t = x + 1$, 则 $t > 0$, $x = t - 1$ 入函数表达式得：

$$y = \frac{a(t - 1)^2 + (t - 1) + 1}{t} = at + \frac{a}{t} + 1 - 2a,$$

$$\because t > 0, a > 0, \therefore \text{上式} \geq 2\sqrt{a^2} + 1 - 2a = 1,$$

当且仅当 $at = \frac{a}{t}$, 即 $t = 1$ 或 $t = -1$ (负值舍去) 等号成立. 此时 $x = t - 1 = 0$

故答案为：1.

【标注】【知识点】用换元法求值域

💡 分式型——二次比二次

15. 函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$ 的值域是 _____.

【答案】 $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$

【解析】函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4} = 1 + \frac{x}{x^2 + 4}$,

当 $x = 0$ 时, $y = 1$;

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y = 1 + \frac{1}{x + \frac{4}{x}} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}} = \frac{5}{4},$$

当且仅当 $x = 2$ 时取得最大值 $\frac{5}{4}$;

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y = 1 + \frac{4}{x + \frac{4}{x}} \geq 1 - \frac{1}{2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}}} = \frac{3}{4},$$

当且仅当 $x = -2$ 时取得最小值 $\frac{3}{4}$.

则函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$ 的值域是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

【知识点】用分离常数法求值域

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

【方法】分离常数法

3. 两个参数的均值考查形式

 直接使用基本不等式

16. 若 $ab > 0$, 则 $\frac{a^2 + 2b^2}{ab}$ 的最小值为()

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 3

D. 2

【答案】 A

【解析】 解: $\because ab > 0, \therefore \frac{a^2 + 2b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 2\sqrt{2},$

当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$, 即 $a = \sqrt{2}b$ 时取等号.

故选: A.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

17. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 ____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】 解: 由 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$,

可得 $3b = a + 6$,

$$\text{则 } 2^a + \frac{1}{8^b} = 2^a + \frac{1}{2^{a+6}} = 2^a + \frac{1}{2^6 \cdot 2^a} \geq 2\sqrt{2^a \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 2^a}} = \frac{1}{4},$$

当且仅当 $2^a = \frac{1}{2^{a+6}}$, 即 $a = -3$ 时取等号.

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

18. 已知 $x > 0, y > 0$. 若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ____ .

【答案】 $(-4, 2)$

【解析】解： $\because x > 0, y > 0 \therefore \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \geq 8$ (当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{8x}{y}$ 时取“=”) .

若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则 $m^2 + 2m < 8$, 解得 $-4 < m < 2$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

知和求积

19. 已知 $x > 0, y > 0, 2x + y = 2$, 则 xy 的最大值为 () .

- A. 1
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{1}{4}$

【答案】B

【解析】 $\because x > 0, y > 0$,

$$\therefore 2x + y \geq 2\sqrt{2xy},$$

$$\therefore 2 \geq 2\sqrt{2xy},$$

$$\therefore 2xy \leq 1,$$

$$\therefore xy \leq \frac{1}{2}.$$

故选：B .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

20. 已知 $x, y \in (0, +\infty)$, 且满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 则 xy 的最大值为 ____ .

【答案】3

【解析】 $\because x > 0, y > 0$,

$$1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{12}}$$

$$\therefore \frac{xy}{12} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\therefore xy \leq 3.$$

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值

21. 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$ ，且 $x + 2y = 3$ ，则 xy 的最大值为_____。

【答案】 $\frac{9}{8}$

【解析】 $x, y \in \mathbf{R}^+$ ， $x + 2y = 3$ ，

即 $3 \geq 2\sqrt{2xy}$ ，当且仅当 $x = 2y = \frac{3}{2}$ 时取等号。

那么： $\frac{9}{4} \geq 2xy$ ，

可得： $xy \leq \frac{1}{8}$ ，

$\therefore x \cdot y$ 的最大值为 $\frac{9}{8}$ 。

故答案为： $\frac{9}{8}$ 。

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

1的代换

【备注】【教师备注】也即调和形式

【示例】已知 $x + y = m (x, y > 0)$ ， m 为常数，求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ （ a, b 为大于0的常数）的最小值。

【解法】采用的是整体代换的思想

【备注】【教师备注】

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{m} \cdot m \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) = \frac{1}{m} \cdot (x + y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) = \frac{1}{m} \cdot \left(a + b + \frac{bx}{y} + \frac{ay}{x} \right) \geq \frac{1}{m} \cdot \left(a + b + 2\sqrt{\frac{bx}{y} \cdot \frac{ay}{x}} \right) = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{m}$$

22. 已知 $x > 0, y > 0$ ， $\frac{1}{x} + \frac{8}{y} = 1$ ，则 $2x + y$ 的最小值为_____。

【答案】18

【解析】 $\because x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{8}{y} = 1$ ，则

$$2x + y = (2x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{y} \right) = 10 + \frac{y}{x} + \frac{16x}{y} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{16x}{y}} = 18, \text{ 当且仅当}$$

$y = 4x = 12$ 时取等号. 故答案为: 18.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用; 倒数和形式; 基本不等式成立的条件

23. 求下列函数的最值.

若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 求 $3x + 4y$ 的最小值.

【答案】 (1) 5.

【解析】 (1) $\because x + 3y = 5xy$,

$$\therefore \frac{x + 3y}{5xy} = 1,$$

$$\text{即 } \frac{1}{5y} + \frac{3}{5x} = 1,$$

$$\therefore 3x + 4y = (3x + 4y) \left(\frac{1}{5y} + \frac{3}{5x} \right) = \frac{3x}{5y} + \frac{9}{5} + \frac{4}{5} + \frac{12y}{5x}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3x}{5y} \times \frac{12y}{5x}} + \frac{13}{5} = \frac{12}{5} + \frac{13}{5} = 5,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{3x}{5y} = \frac{12y}{5x} \text{ 时,}$$

等号成立,

$$\therefore 3x + 4y \text{ 的最小值为 } 5.$$

【标注】【知识点】倒数和形式; 利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件; 基本不等式的实际应用

24. 若直线 $ax + by = 1 (a, b \in \mathbf{R})$ 经过点 $(1, 2)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 ____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】 $\because ax + by = 1$ 过 $(1, 2)$,

$$\therefore a + 2b = 1,$$

$$(a + 2b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (1 + \sqrt{2})^2,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 3 + 2\sqrt{2},$$

故答案为 $3 + 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式成立的条件; 利用基本不等式求最值

25. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 8$, 则 $\frac{3ab}{a + 4b}$ 的最大值是 ____.

【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】 $\therefore \left(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}\right)$
 $= \left(\frac{1}{b} + \frac{4}{a}\right) \frac{(a+b)}{8}$
 $= \frac{a}{8b} + \frac{b}{2a} + \frac{5}{8}$
 $\geq 2\sqrt{\frac{a}{8b} \cdot \frac{b}{2a}} + \frac{5}{8}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$
 $= \frac{9}{8},$
 $\therefore \frac{3ab}{a+4b} = \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{4}{a}} \leq \frac{3}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{3},$
当且仅当 $\frac{a}{8b} = \frac{b}{2a}$ 时, 即 $a = 2b$ 时, 等号成立.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 倒数和形式

26. 对于使 $f(x) \leq M$ 成立的所有常数 M , 我们把 M 的最小值称为 $f(x)$ 的上确界. 若 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $a+b=1$, 则 $-\frac{1}{2a} - \frac{2}{b}$ 的上确界为 ().
- A. $-\frac{9}{2}$ B. $-\frac{9}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. -4

【答案】 A

【解析】 $\therefore \frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{b}\right)(a+b)$
 $= \frac{1}{2} + 2 + \frac{b}{2a} + \frac{2a}{b}$
 $\geq \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2},$
当且仅当 $\frac{b}{2a} = \frac{2a}{b}$ 时取等号,
故 $-\left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{b}\right) \leq -\frac{5}{2},$
 $\therefore -\frac{1}{2a} - \frac{2}{b}$ 的上确界为 $-\frac{5}{2},$
故选 A.

【标注】【特色题型】新定义

【素养】数学抽象; 数学运算

【知识点】已知等式关系求最值; 函数的新定义问题



加减常数——1的代换

27. 已知正数 x, y 满足 $x+y=1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{1+y}$ 的最小值为 ().
- A. 5 B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{9}{2}$ D. 2

【答案】 C

【解析】 $\because x + y = 1$,

$$\therefore x + (1 + y) = 2.$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{4}{1+y} = \frac{1}{2}[x + (1+y)]\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{1+y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4x}{1+y} + \frac{1+y}{x} + 4\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(5 + \frac{4x}{1+y} + \frac{1+y}{x}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(5 + 2\sqrt{\frac{4x}{1+y} \cdot \frac{1+y}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(5 + 2 \times 2)$$

$$= \frac{9}{2}.$$

当且仅当 $\frac{4x}{1+y} = \frac{1+y}{x}$, 即 $1+y = 2x$ (即 $y = 2x - 1$) 时取等.

故答案为 C.

【标注】 【知识点】 基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件

28. 求下列函数的最值.

设 $a > 0, b > 1$, 若 $a + b = 2$, 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值.

【答案】 (1) $2\sqrt{2} + 3$.

【解析】 (1) $\because a + b = 2$,

$$\therefore a + (b - 1) = 1,$$

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{1}{b-1} = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1}\right)[a + (b-1)] = 2 + \frac{2(b-1)}{a} + \frac{a}{b-1} + 1$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{2(b-1)}{a} \cdot \frac{a}{b-1}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3,$$

当且仅当 $\frac{2(b-1)}{a} = \frac{a}{b-1}$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{3}, b = 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ 时, 等号成立,

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{1}{b-1} \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2} + 3.$$

【标注】 【知识点】 倒数和形式；利用基本不等式求最值；基本不等式成立的条件；基本不等式的实际应用

29. 已知 x, y 均为正实数, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{6}$, 则 $x + y$ 的最小值为 ().

A. 24

B. 32

C. 20

D. 28

【答案】 C

【解析】 $\because x, y$ 均为正实数, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{6}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } x+y &= (x+2+y+2)-4 = 6\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2}\right)(x+2+y+2)-4 \\ &= 6\left(2 + \frac{x+2}{y+2} + \frac{y+2}{x+2}\right) - 4 \geq 6 \times \left(2 + 2\sqrt{\frac{x+2}{y+2} \cdot \frac{y+2}{x+2}}\right) - 4 \\ &= 20, \end{aligned}$$

当且仅当 $x = y = 10$ 时取等号,

$\therefore x+y$ 的最小值为 20.

故选 C.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用; 利用基本不等式求最值

30. 若函数 $f(x) = x + \frac{m}{x-1}$ (m 为大于 0 的常数) 在 $(1, +\infty)$ 上的最小值为 3, 则实数 m 的值为 _____.

【答案】1

【解析】由 $x > 1$, 可得 $x-1 > 0$,

$$\text{即有 } f(x) = (x-1) + \frac{m}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{m}{x-1}} + 1 = 2\sqrt{m} + 1,$$

当且仅当 $x-1 = \frac{m}{x-1}$, 即 $x = 1 + \sqrt{m}$ 处取得最小值, 且最小值为 $1 + 2\sqrt{m}$,

由题意可得 $1 + 2\sqrt{m} = 3$, 解得 $m = 1$.

【标注】【知识点】基本不等式的概念