

03基本不等式1

1. 基本不等式的来源及常见形式

1. 算术平均数与几何平均数

对于给定的两个正数 a, b

算术平均数：_____

几何平均数：_____

2. 均值不等式/基本不等式（均值定理）

①语言表述：两个正实数的算术平均数_____它们的几何平均数

②公式表述：设 $a, b > 0$,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a = b$ 时, 等号成立.

3. 正数形式

如果 a, b 是正数, 那么_____, 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

此结论又称**均值不等式**或**基本不等式**.

4. 负数形式

如果 a, b 都为负数时, _____. 当且仅当 $a = b$ 时, 有等号成立.

5. 常用乘积形式

6. 均值不等式需要注意三个方面：

一正二定三相等

一般结论：
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

即：平方平均数 $\geq$ 算术平均数 $\geq$ 几何平均数 $\geq$ 调和平均数

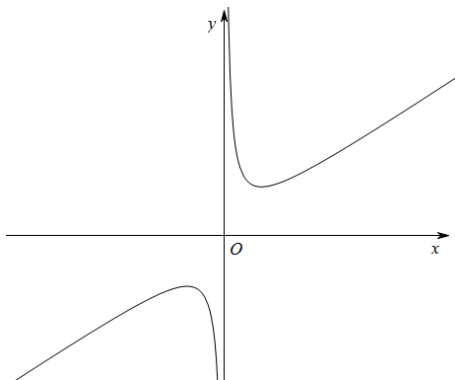
2. 一个参数的均值考查形式

形如 $y = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) **对勾函数模型**

$f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 的性质和图象：

①定义域：_____

- ②值域：_____
- ③单调性：_____
- ④奇偶性：_____
- ⑤图象：



💡 直接套用基本不等式

1. 已知 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 (x < 0)$ ，则 $f(x)$ 有最 _____ 值为 _____。
2. 解答下列各题：
 - (1) 若 $x > 0$ ，求 $f(x) = \frac{12}{x} + 3x$ 的最小值。
 - (2) 若 $x < 0$ ，求 $f(x) = \frac{12}{x} + 3x$ 的最大值。
3. 已知实数 $x > 0$ ，则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是 _____。
4. 设 $0 < x < 2$ ，求函数 $f(x) = \sqrt{3x(8 - 3x)}$ 的最大值，并求相应的 x 值。

💡 配凑法（加减常数）

5. 求下列函数的最值。
求函数 $y = 2x + \frac{1}{x-1} (x > 1)$ 的最小值。
6. 若 $x > -1$ ，则函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 取最小值时对应的 x 的值为 _____。
7. 若 $x > 1$ ，则 $1 + 4x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值是 _____，此时 $x =$ _____。
8. 已知函数 $f(x) = 2x + \frac{2}{x+1}$ 。
若 $x \in (-1, +\infty)$ ，求 $f(x)$ 的最小值，并指出此时 x 的值。
9. 已知函数 $y = x - 4 + \frac{9}{x+1} (x > -1)$ ，当 $x = a$ 时， y 取得最小值 b ，则 $a + b = (\quad)$ 。
A. -3 B. 2 C. 3 D. 8
10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}+2}$ ，则 $f(x)$ 的最小值为 _____。

🔔 分式型——二次比一次

11. 已知 $t > 0$, 则函数 $y = \frac{t^2 - 4t + 1}{t}$ 的最小值为 _____ .

12. 已知 $x > 2$, 求 $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}$ 的最小值 .

13. 设 $x < 1$, 则 $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ 的值域为 _____ .

14. 解答下列问题 :

求函数 $y = \frac{ax^2 + x + 1}{x + 1}$ ($x > -1$ 且 $a > 0$) 的最小值 .

🔔 分式型——二次比二次

15. 函数 $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$ 的值域是 _____ .

3. 两个参数的均值考查形式

🔔 直接使用基本不等式

16. 若 $ab > 0$, 则 $\frac{a^2 + 2b^2}{ab}$ 的最小值为()

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. 3

D. 2

17. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____ .

18. 已知 $x > 0, y > 0$. 若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

🔔 知和求积

19. 已知 $x > 0, y > 0, 2x + y = 2$, 则 xy 的最大值为() .

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

20. 已知 $x, y \in (0, +\infty)$, 且满足 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, 则 xy 的最大值为 _____ .

21. 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + 2y = 3$, 则 xy 的最大值为 _____ .

🔔 1的代换

【示例】已知 $x + y = m (x, y > 0)$, m 为常数, 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ (a, b 为大于 0 的常数) 的最小值 .

【解法】采用的是整体代换的思想

22. 已知 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{8}{y} = 1$, 则 $2x + y$ 的最小值为 _____ .

23. 求下列函数的最值 .

若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 求 $3x + 4y$ 的最小值 .

24. 若直线 $ax + by = 1 (a, b \in \mathbf{R})$ 经过点 $(1, 2)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 _____ .

25. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 8$, 则 $\frac{3ab}{a + 4b}$ 的最大值是 _____ .

26. 对于使 $f(x) \leq M$ 成立的所有常数 M , 我们把 M 的最小值称为 $f(x)$ 的上确界. 若 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $a + b = 1$, 则 $-\frac{1}{2a} - \frac{2}{b}$ 的上确界为 () .

A. $-\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. -4



加减常数——1的代换

27. 已知正数 x, y 满足 $x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{4}{1+y}$ 的最小值为 () .

A. 5

B. $\frac{14}{3}$

C. $\frac{9}{2}$

D. 2

28. 求下列函数的最值 .

设 $a > 0, b > 1$, 若 $a + b = 2$, 求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值 .

29. 已知 x, y 均为正实数, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{6}$, 则 $x + y$ 的最小值为 () .

A. 24

B. 32

C. 20

D. 28

30. 若函数 $f(x) = x + \frac{m}{x-1}$ (m 为大于0的常数)在 $(1, +\infty)$ 上的最小值为3, 则实数 m 的值为 _____ .