

03基本不等式1练习题

1. 一个参数的均值考查形式

 直接使用基本不等式

1. 函数 $y = x + \frac{1}{x} + 6 (x > 0)$ 的最小值为 () .

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】 C

【解析】 因为 $x > 0$,

$$\text{所以 } y = x + \frac{1}{x} + 6 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 6 = 8,$$

当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时取得等号,

故选C.

【标注】 【知识点】基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

2. 函数 $y = x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$ 的最小值为 ____ .

【答案】 3

【解析】 $\because x > 0$,

$$\begin{aligned} \therefore \text{函数 } y &= x + \frac{1}{x} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 \\ &= 3, \end{aligned}$$

当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

$\therefore$ 函数 $y = x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$ 的最小值为3.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用

3. 已知 $x > 0$, 则 $\frac{9}{x} + x$ 的最小值为 () .

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】 A

【解析】 $\because x > 0$,

则 $\frac{9}{x} + x \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$,
 当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x = 3$ 时取得最小值 6 ,
 故选 A .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

配凑法 (加减常数)

4. 已知 $x > 2$, 则 $x + \frac{4}{x-2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 6

【解析】 $\because x > 2$,

$$\therefore x - 2 > 0 ,$$

$$x + \frac{4}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 2 \geq 4 + 2 = 6 ,$$

当且仅当 $x = 4$ 时取得最小值 .

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

【素养】数学运算

5. 已知 $a > -2$, 则 $a + \frac{16}{a+2}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 6

【解析】 $\because a > -2$,

$$\therefore a + 2 > 0 ,$$

$$\therefore a + \frac{16}{a+2} = a + 2 + \frac{16}{a+2} - 2 \geq 2\sqrt{16} - 2 = 6 ,$$

当且仅当 $a = 2$ 时取得最小值 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

6. 设 $x > 1$, $y = x + \frac{1}{x-1}$ 在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时 y 得最小值等于 _____ .

【答案】 2 ; 3

【解析】 $\because x > 1$,

$$\therefore x - 1 > 0 ,$$

$$\therefore y = x + \frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 = 3 ,$$

当且仅当 $x - 1 = \frac{1}{x - 1}$,

即 $x = 2$ 时取等号 .

故答案为 : 2 ; 3 .

【标注】【知识点】配凑法求最值

7. 已知 $a > 1$, 则不等式 $a + \frac{2}{a-1}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $1 + 2\sqrt{2}$

【解析】 $a + \frac{2}{a-1} = a - 1 + \frac{2}{a-1} + 1 \geq 1 + 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $a - 1 = \frac{2}{a-1}$, 即 $a = 1 + \sqrt{2}$ 时等号成立 .

$\therefore$ 不等式 $a + \frac{2}{a-1}$ 的最小值为 $1 + 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】基本不等式的实际应用

8. 请回答下列问题 .

已知 $x > \frac{1}{2}$, 求 $y = 2x + \frac{4}{2x-1}$ 的最小值 , 并求取到最小值时 x 的值 .

【答案】 (1) 5 , $x = \frac{3}{2}$.

【解析】 (1) $\because x > \frac{1}{2}$, 则 $2x - 1 > 0$,

$\therefore 2x + \frac{4}{2x-1} = 2x - 1 + \frac{4}{2x-1} + 1$,

则 $2x - 1 + \frac{4}{2x-1} \geq 2\sqrt{(2x-1)\frac{4}{2x-1}} = 4$,

当且仅当 $2x - 1 = \frac{4}{2x-1}$ 时 , 等号成立 ,

$\therefore 2x + \frac{4}{2x-1} \geq 4 + 1 = 5$,

所以 $y = 2x + \frac{4}{2x-1}$ 的最小值为 5 .

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

分式型

9.

求函数 $y = \frac{x^2 + 2}{x-1}$ ($x > 1$) 的最小值 .

【答案】 (1) $2\sqrt{3} + 2$.

【解析】(1) $\because x > 1$,

$$\therefore x - 1 > 0,$$

$\therefore$

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 3}{x - 1} = x - 1 + \frac{3}{x - 1} + 2 \geq 2\sqrt{(x - 1) \cdot \frac{3}{x - 1}} + 2 = 2\sqrt{3} + 2$$

$$\text{当且仅当 } x - 1 = \frac{3}{x - 1},$$

即 $x = 1 + \sqrt{3}$ 时, 等号成立,

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} (x > 1) \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{3} + 2.$$

【标注】【知识点】倒数和形式; 利用基本不等式求最值; 基本不等式成立的条件; 基本不等式的实际应用

2. 两个参数的均值考查形式

知和求积

10. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $2x + y = 1$, 则 xy 的最大值是 ().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{8}$

C. 4

D. 8

【答案】B

【解析】 $\because x > 0$, $y > 0$, 且 $2x + y = 1$,

$$\therefore xy = \frac{1}{2} \times 2xy \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x + y}{2} \right)^2 = \frac{1}{8},$$

当且仅当 $2x = y > 0$, 即 $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ 时取等号,

此时, xy 的最大值是 $\frac{1}{8}$.

故选B.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则 ab 的最大值是 ____.

【答案】1

【解析】 $\because a > 0$, $b > 0$,

$$\therefore ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1,$$

当 $a = b = 1$ 时, 取得最大值.

故答案为: 1.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值

1的代换

12. 解答下列各题：

已知 $x > 0, y > 0, 2x + 5y = 1$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值。

【答案】(1) $7 + 2\sqrt{10}$ 。

【解析】(1) $\because 2x + 5y = 1$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(2x + 5y) \\ &= 2 + \frac{5y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 2 + 2\sqrt{10},\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{5y}{x}$ ，即 $5y^2 = 2x^2$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 $7 + 2\sqrt{10}$ 。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；倒数和形式；基本不等式的概念

13. 已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$ ，则 $x + y$ 的最小值为_____。

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】依题意得 $x + y = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = 3 + \left(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$ ，即 $y = \sqrt{2}x = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$ 时取等号，因此 $x + y$ 的最小值是 $3 + 2\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；倒数和形式；基本不等式的实际应用

14. 设 a, b 是正实数，且 $a + b = 1$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是()。

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $2 + 2\sqrt{2}$

D. 4

【答案】D

【解析】 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$
当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ ，即 $a = b = \frac{1}{2}$ 时等号成立。

故选D。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用

15. 设函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$.

若 $f(1) = 3$, 且 $a > 0, b > 0$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

【答案】 (1) $\frac{9}{2}$.

【解析】 (1) $f(1) = 3$ 得 $a + b = 2$,

$\because a > 0, b > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $b = 2a$ 时取得等号,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数相关的恒成立问题；含参二次函数的图象及性质；基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

加加减减——1的代换

16. 若正实数 x, y 满足 $x + y = 1$, 则 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ().

A. $\frac{44}{7}$

B. $\frac{27}{5}$

C. $\frac{14}{3}$

D. $\frac{9}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because x > 0, y > 0, x + y = 1$,

$$\therefore x + 1 + y = 2,$$

$$\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{x+1+y}{2} \cdot \left(\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} (1 + 4 + \frac{4y}{x+1}) \geq \frac{1}{2} (5 + 2\sqrt{4}) = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}$ 取等号.

故选 D.

【标注】【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值；倒数和形式

17. 设 $a > 1, b > 0$, 若 $a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a-1} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 ____.

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】 方法一： $\because a > 1, b > 0, a + b = 2$,

$$\therefore a - 1 > 0, a - 1 + b = 1,$$

∴

$$\frac{1}{a-1} + \frac{2}{b} = (a-1+b) \left(\frac{1}{a-1} + \frac{2}{b} \right) = 3 + \frac{b}{a-1} + \frac{2(a-1)}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a-1} \times \frac{2(a-1)}{b}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

,

当且仅当 $b = \sqrt{2}(a-1)$, $a+b=2$,

即 $a = \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号,

∴ $\frac{1}{a-1} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$.

方法二: ∵ $a+b=2$,

∴ $b = 2-a > 0$, 解得 $a < 2$,

又 $a > 1$, $1 < a < 2$,

$$\therefore \frac{1}{a-1} + \frac{2}{b} = \frac{1}{a-1} + \frac{2}{2-a} = f(a),$$

$$f'(a) = -\frac{1}{(a-1)^2} + \frac{2}{(2-a)^2} = \frac{a^2-2}{(a^2-3a+2)^2},$$

令 $f'(a) = 0$, 及 $1 < a < 2$, 解得 $a = \sqrt{2}$,

当 $a \in (1, \sqrt{2})$ 时, $f'(a) < 0$, 函数 $f(a)$ 单调递减;

当 $a \in (\sqrt{2}, 2)$ 时, 函数 $f'(a) > 0$, 函数 $f(a)$ 单调递增,

∴ 当 $a = \sqrt{2}$ 时, $f(a)$ 取得极小值即最小值, $f(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

综上所述: 故答案为: $3 + 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】已知等式关系求最值

18. 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$, $x > 0$ 的最小值为 ().

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } x + \frac{4}{x+1} \\ &= x+1 + \frac{4}{x+1} - 1, \end{aligned}$$

∵ $x > 0$,

∴ $x+1 > 1$,

$$x+1 + \frac{4}{x+1} \geq 2\sqrt{4} = 4,$$

当 $= 1$ 时取得最小值,

$$\therefore f(x) \geq 4 - 1 = 3.$$

故选: B.

【标注】【知识点】基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

19. 已知 $x > -1$, $y > 0$ 且满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y}$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $\because x + 2y = 1$,

$$\therefore (x+1) + 2y = 2, \quad x+1 > 0, \quad y > 0,$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y} &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y} \right) [(x+1) + 2y] \times \frac{1}{2} \\ &= \left[1 + \frac{2y}{x+1} + \frac{2(x+1)}{y} + 4 \right] \times \frac{1}{2} \geq (5 + 2\sqrt{4}) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \\ \text{当 } \frac{2y}{x+1} &= \frac{2(x+1)}{y} \text{ 即 } y = x+1 \text{ 时取得等号, 故最小值为 } \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

【标注】 **【知识点】** 基本不等式的实际应用；利用基本不等式求最值