

02函数的值域与分段函数练习题

直接观察法求值域

1. 函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ 的值域是 _____ .

【答案】 $(0, 1]$

【解析】 由 $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, 可得 $f(x)$ 的最小值为 1 ,

$\therefore y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ 的值域为 $(0, 1]$.

故答案为 : $(0, 1]$.

【标注】 【知识点】用配方法求值域

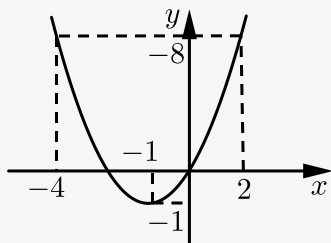
【素养】数学运算 ; 逻辑推理

【方法】配方法

2. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的定义域是 $[-4, m]$, 值域是 $[-1, 8]$, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

【答案】 $-1 \leq m \leq 2$

【解析】



$$f(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 ,$$

$$\therefore f(-4) = 8 ,$$

$$\text{又} \because f(-1) = -1 ,$$

$$x^2 + 2x = 8 ,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 ,$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0 ,$$

$$x = 2 \text{ 或 } x = -4 ,$$

$$\therefore f(2) = 8 ,$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 2 .$$

【标注】 【知识点】已知函数值域求参数

换元法求值域

3. 函数 $f(x) = 2x - \sqrt{x-1}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$

【标注】 【知识点】二次函数的图象及性质

【知识点】用换元法求值域

【思想】数形结合思想

【方法】换元法

【素养】直观想象

【素养】逻辑推理

【素养】数学运算

配方法求函数值域

4. 函数 $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-4) + x - 1$ 的值域为 _____ .

【答案】 $[-3, +\infty)$

【解析】 $\because f(x) = 2x - 4\sqrt{x} - 1 = 2(\sqrt{x}-1)^2 - 3 \ (x \geq 0)$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[-3, +\infty)$.

故答案为 : $[-3, +\infty)$.

【标注】 【知识点】用配方法求值域

换元法 (对勾函数型) 求值域

5. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$, $x \in [2, 3]$ 的值域为 _____ .

【答案】 $[7, 8]$

【解析】 略 .

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】函数的值域

分离常数法求值域

6. 求 $y = \frac{x+2}{x+1}$ 的值域 .

【答案】 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

【解析】 $\because y = \frac{x+2}{x+1+1}$,
 $\therefore y = \frac{x+1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$,
 $\therefore \frac{1}{x+1} \neq 0$,
 $\therefore y = 1 + \frac{1}{x+1} \neq 1$,
 $\therefore y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 用分离常数法求值域

7. 函数 $y = \frac{2x+3}{x-2}$, $x \in [3, 8]$ 的值域为 _____ .

【答案】 $\left[\frac{19}{6}, 9\right]$

【解析】 $y \in \left[\frac{19}{6}, 9\right]$.

【标注】 【素养】 数学运算

8. 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上的值域为 _____ .

【答案】 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$

【解析】 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2} = 1 - \frac{3}{x^2+2}$,
 $\because x \in (-1, +\infty)$,
 $\therefore x^2+2 \in [2, +\infty)$,
 $\therefore -\frac{3}{x^2+2} \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$.
故答案为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$.

【标注】 【知识点】 用分离常数法求值域

9. 函数 $y = \frac{4+5x^2}{1+x^2}$ 的值域为 _____ .

【答案】 $[4, 5)$

【解析】 $\because y = \frac{4+5x^2}{1+x^2} = \frac{5x^2+5-1}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
 &= 5 - \frac{1}{x^2 + 1}, \\
 &\text{设 } t = x^2 + 1, t \geq 1, \\
 &\therefore y = 5 - \frac{1}{t}, t \geq 1, \\
 &\therefore -\frac{1}{t} \in (0, 1], \\
 &\therefore 5 - \frac{1}{t} \in [4, 5), \\
 &\therefore y \in [4, 5).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】复合函数

分段函数赋值运算

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = x+2 = 3$, 解得 $x = 1$, 不合题意;

当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = x^2 = 3$, 解得 $x = \pm\sqrt{3}$ (舍负),

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 2x = 3$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, 不合题意.

综上, $x = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】函数求值问题; 分段函数

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 1 \\ x^2+x-2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{15}{16}$

【解析】由于 $2 > 1$, 故 $f(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4$,

$$\text{故 } \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{4} \leq 1,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{f(2)}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16},$$

故答案为 $\frac{15}{16}$.

【标注】【知识点】分段函数; 函数求值问题

分段函数实际应用

12. 为保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”，计费方法如下表：

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3 的部分	3元/ m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3 的部分	6元/ m^3
超过 18m^3 的部分	9元/ m^3

设某户居民本月实际用水量为 x （单位： m^3 ），应交纳水费为 y （单位：元）。

（1）求 y 关于 x 的函数解析式。

（2）若某户居民本月交纳的水费为48元，求此户居民本月用水量。

【答案】（1）
$$y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 6x - 36, & 12 < x \leq 18 \\ 9x - 90, & x > 18 \end{cases}$$

（2）14。

【解析】（1）设每户每月用水量为 x ，水价为 y 元，

$$\text{则 } y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 36 + (x - 12) \times 6, & 12 < x \leq 18 \\ 36 + 36 + (x - 18) \times 9, & x > 18 \end{cases}$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 12 \\ 6x - 36, & 12 < x \leq 18 \\ 9x - 90, & x > 18 \end{cases}$$

（2）由题意得 $12 < x \leq 18$ ，

$$\therefore 48 = 6x - 36, x = 14.$$

【标注】【知识点】分段函数模型；函数求值问题；分段函数；实际应用中的函数求定义域

13. 经市场调查，某蔬菜在过去8天的日销售量和每日价格均为销售时间 t （天）的函数，且日销售量近

似地满足： $f(t) = -2t + 24(1 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N})$ ，前4天每日价格近似地满足

$$g(t) = \frac{1}{2}t + 3(1 \leq t \leq 4, t \in \mathbf{N}), \text{ 为促销, 后4天每日价格满足 } g(t) = 4(5 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N}).$$

（1）写出该蔬菜的日销售额 y 关于时间 t 的函数关系。

（2）求日销售额 y 的最大值。

【答案】（1）
$$y = \begin{cases} -t^2 + 6t + 72, & 1 \leq t \leq 4 \\ -8t + 96, & 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

（2）81。

【解析】（1）由题意知：蔬菜日销售量与销售时间的关系为：

$$f(t) = -2t + 24(1 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N}),$$

日价格与销售时间的关系为：

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 3, & 1 \leq t \leq 4, t \in \mathbf{N} \\ 4, & 5 \leq t \leq 8, t \in \mathbf{N} \end{cases}$$

∴当 $t \in [1, 4]$ 时,

$$\text{日销售额 } y = (-2t + 24) \times \left(\frac{1}{2}t + 3\right)$$

$$= -t^2 + 6t + 72.$$

当 $t \in [5, 8]$ 时,

$$\text{日销售额 } y = (-2t + 24) \times 4$$

$$= -8t + 96.$$

∴日销售额与时间 t 的函数关系为:

$$y = \begin{cases} -t^2 + 6t + 72, & 1 \leq t \leq 4 \\ -8t + 96, & 5 \leq t \leq 8 \end{cases}.$$

$$(2) \text{ 当 } 1 \leq t \leq 4 \text{ 时, } y = -t^2 + 6t + 72 = -(t-3)^2 + 81,$$

∴当 $t = 3$ 时, y 有最大值为 81,

当 $5 \leq t \leq 8$ 时, $y = -8t + 96$,

∴当 $t = 5$ 时, y 有最大值 56,

∴当 $t = 3$ 时, 日销售额 y 最大, 为 81.

【标注】【知识点】用配方法求值域; 二次函数的图象及性质; 二次函数模型

分段函数的值域

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \left|x + \frac{4}{x} - 2a\right| + a$.

若 $a = 0$, 求函数 $f(x)$ 的值域.

【答案】 (1) $[4, +\infty)$.

【解析】 (1) $a = 0$ 时, $f(x) = \left|x + \frac{4}{x}\right|$
 $= |x| + \left|\frac{4}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x| \cdot \left|\frac{4}{x}\right|}$
 $= 4,$
 ∴值域为 $[4, +\infty)$.

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的实际应用; 用单调性观察法求值域

15. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 6x, & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ 的值域是 ().

A. $\mathbf{R}$

B. $[-9, +\infty)$

C. $[-8, 1]$

D. $[-9, 1]$

【答案】 C

【解析】 函数 $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 3$ 的值域 $B = [-3, 1]$,

函数 $y = x^2 + 6x$, $-2 \leq x \leq 0$ 的值域 $C = [-8, 0]$,

故函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 (0 \leq x \leq 3) \\ x^2 + 6x (-2 \leq x \leq 0) \end{cases}$ 的值域是 $B \cup C = [-8, 1]$,

故选C.

【标注】 【知识点】用单调性观察法求值域