

01函数的定义与要素

【金金备注】

定义域是 $\mathbf{R}$ 的类型题

放在了《函数性质综合》中第三讲【函数性质综合】、《基本初等函数》中第五讲【函数性质综合】那一讲里啦！

有需要可以跳转至那里练习！

1. 函数的定义

1.函数的定义

设 A 、 B 是两个**非空数集**，如果按照某种**确定的对应关系 f** ，使对于**集合 A 中的任意一个数 x** ，在**集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应**——

那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记作 $f(x) x \in A$ ；

2.函数三要素

以上定义中， x 叫做**自变量**， x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**；

与 x 的值相对应的 y 值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的**值域**

定义域、值域、对应关系是函数的三要素

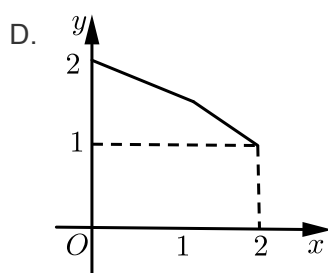
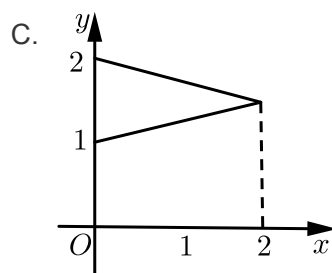
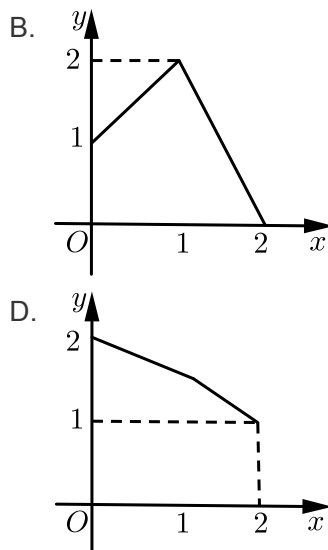
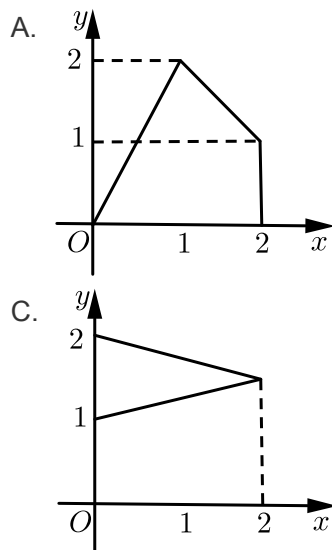
【备注】【教师备注】

① A 、 B 都是非空数集，因此函数的定义域和值域不能为空集.

②**对应关系是核心，定义域是根本**，当定义域和对应关系确定时，值域也就确定了.

③关于**对应关系 f** ，它是函数的**本质特征**

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $A = \{x|0 \leq x \leq 2\}$ ，值域 $B = \{y|1 \leq y \leq 2\}$ ，下列选项中，能表示 $f(x)$ 的图象的只可能是（ ）.



【答案】D

【解析】A, C表示的不是函数的图象, 因为其不函数定义中B中有唯一的元素和A中元素对应;
B表示的图象是函数, 其值域为 $B = \{y|0 \leq y \leq 2\}$, 故也不满足要求;
D表示的图象是函数, 其定义域 $A = \{x|0 \leq x \leq 2\}$, 值域 $B = \{y|1 \leq y \leq 2\}$, 故满足要求;
故选: D.

【标注】【知识点】函数图象的识别问题; 函数的定义; 图象法

2. 函数的表示方法

1. 解析法

用**数学表达式**表示两个变量之间的对应关系

举例: $f(x) = 3x + 5$; 狄利克雷函数: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

2. 图象法

以自变量 x 的值为横坐标, 与之对应的函数值 $f(x)$ 为纵坐标, 在平面直角坐标系中描出各个点 $(x, f(x))$, 这些点组成的**图形**称为函数 $y = f(x)$ 的**图象**

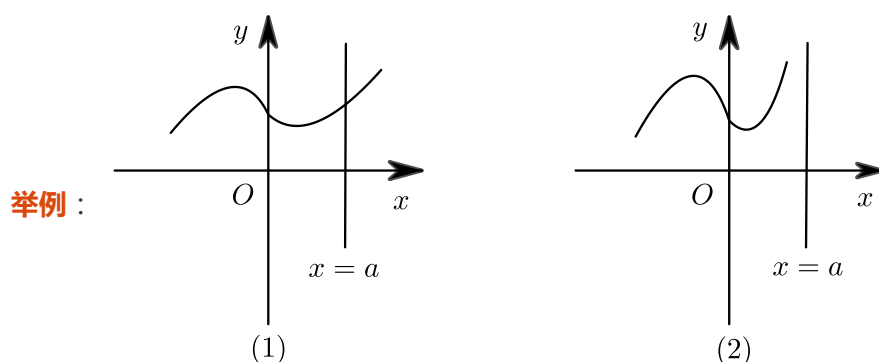


图3-1-1

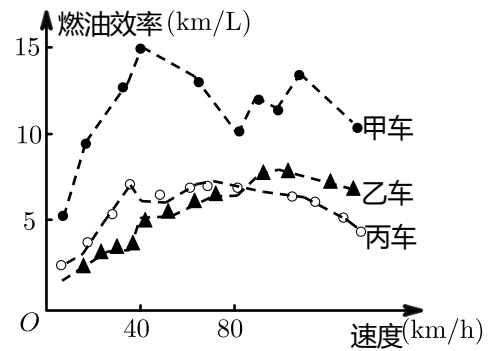
3. 列表法

列一个两行多列的表格, 第一行是自变量的取值, 第二行是对应的函数值

举例: 某水库的存水量 Q 与水库最深处的水深 H 的关系如下表所示:

水深 H/m	5	10	15	20	25	30	35
存水量 $Q/10^4\text{m}^3$	20	40	90	160	275	437	650

2. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程，下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况，下列叙述中正确的是（ ）.



- A. 消耗1升汽油，乙车最多可行驶5千米
- B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
- C. 甲车以80千米/小时的速度行驶1小时，消耗10升汽油
- D. 某城市机动车最高限速80千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油

【答案】 D

【解析】 A 选项：由图像可知当速度大于40km/h时，乙车的燃油效率大于5km/L，所以当速度大于40km/h时，消耗1升汽油，乙车的行驶距离大于5km，故A错误；

B 选项：由图像可知当速度相同时，甲车的燃油效率最高，即当速度相同时，消耗1升汽油，甲车的行驶路程最远，所以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最少，故B错误；

C 选项：由图像可知当速度为80km/h时，甲车的燃油效率为10km/L，即甲车行驶10km时，耗油1升，故行驶1小时，路程为80km，燃油为8升，故C错误；

D 选项：由图像可知当速度小于80km/h时，丙车的燃油效率大于乙车的燃油效率，所以用丙车比乙车更省油，故D正确；

故选 D.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】一次函数模型

3. 如图1是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图象（收支差额=车票收入-支出费用）. 由于目前本条线路亏损，公司有关人员将图1变为图2与图3，从而提出了相亏为盈的两种建议. 下面有4种说法：

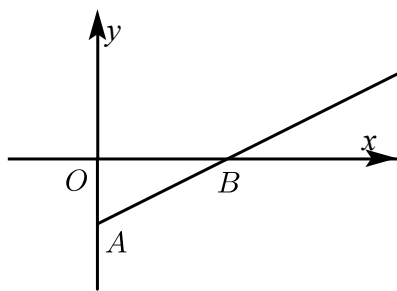


图1

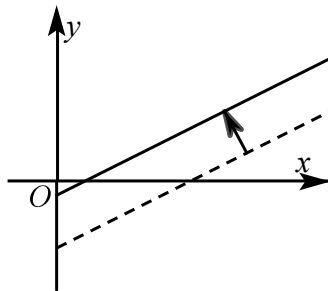


图2

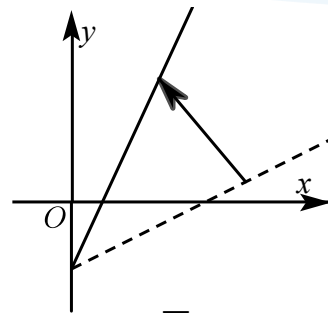


图3

①图2的建议是：减少支出，提高票价；

②图2的建议是：减少支出，票价不变；

③图3的建议是：减少支出，提高票价；

④图3的建议是：支出不变，提高票价；

上面说法中正确的是（ ）。

A. ①③

B. ①④

C. ②④

D. ②③

【答案】 C

【解析】 根据题意和图（2）知，两直线平行即票价不变，

直线向上平移说明当乘客量为0时，收入是0但是支出的变少了，

即说明了此建议是降低成本而保持票价不变；

由图（3）看出，当乘客量为0时，支出不变，

但是直线的倾斜角变大，即相同的乘客量时收入变大，

即票价提高了，即说明了此建议是提高票价而保持成本不变。

故选C。

【标注】【知识点】一次函数模型

3. 确定函数定义域

①若 $f(x)$ 是整式，则其定义域为_____

②若 $f(x)$ 是分式，则定义域是_____

③若 $f(x)$ 是偶次根式，则定义域是_____

④ $f(x) = x^0$ 的定义域是_____

⑤若 $f(x)$ 由若干结构的代数式构成，则函数的定义域是_____

【备注】【答案】① $\mathbf{R}$ ．②分母不等于0的实数的集合．③根号内的式子大于或等于0的实数的集合．

④ $\{x|x \neq 0\}$ ⑤使代数式都有意义的实数集合的交集．

函数 $f(x) = \frac{1}{2-x} + \sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 () .

- A. $\{x|x \neq 2\}$
- B. $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$
- C. $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$
- D. $\{x|-3 \leq x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 2\}$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x) = \frac{1}{2-x} + \sqrt{9-x^2}$ 的定义域, $\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases}$,

故定义域为 $\{x|-3 \leq x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 2\}$.

故选D .

【标注】 【知识点】 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域

5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 () .

- A. $[-1, 1]$
- B. $\{-1, 1\}$
- C. $(-1, 1)$
- D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$,

$\therefore x = \pm 1$.

故选B .

【标注】 【知识点】 求具体函数 (包括复合函数) 的定义域

6. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是 () .

- A. $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$
- B. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$
- C. $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$
- D. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

【答案】 D

【解析】 要使函数有意义, 则 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x^2-x-1 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$.

故选D .

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

7. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域为 () .

A. $(2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(-\infty, 2]$

【答案】 A

【解析】 $\because x - 2 > 0$,

$\therefore x > 2$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 : $\{x \mid x > 2\}$.

故选A .

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

8. 函数 $y = \frac{3}{1 - \sqrt{1-x}}$ 的定义域是 () .

A. $(-\infty, 1)$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

D. $[1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 定义域 $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} \neq 1 \end{cases}$, 解得 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

故选B .

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

9. 求下列函数的定义域 .

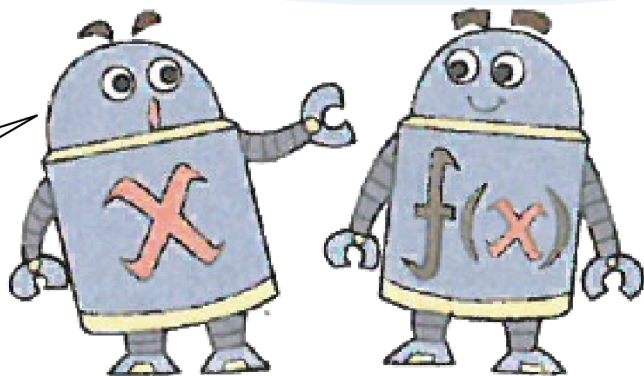
$$f(x) = \frac{(x-1)^0}{\sqrt{x+2}} .$$

【答案】 (1) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域

4. 抽象函数定义域

不管你变成什么样子，只要是定义域就来找我！



求解抽象函数定义域的要点

- ①函数的**定义域永远指的是自变量 x 本身的范围**
- ②对于一道题目，同一对应法则所直接**作用的对象范围必须保持一致**

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 4)$ ，则函数 $f(2x - 3)$ 的定义域 _____ .

【答案】 $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 4)$ ，
 $\therefore$ 函数 $f(2x - 3)$ 满足 $-2 \leq 2x - 3 < 4$ ，
 解得 $\frac{1}{2} \leq x < \frac{7}{2}$ ，
 $\therefore$ 函数 $f(2x - 3)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 。
 故答案为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】求抽象函数的定义域

11. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x}$ 的定义域是 _____ .

【答案】 $[-1, 0) \cup (0, 1]$

【解析】 $\because$ 函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$ ，
 由 $-2 \leq 2x \leq 2$ ，得 $-1 \leq x \leq 1$ ，
 $\therefore f(2x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$ ，
 $\therefore$ 函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x}$ 的定义域是 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 。

【标注】【知识点】求抽象函数的定义域

12. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域 $[-8, 1]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x+1)}{x+2}$ 的定义域是 () .

- A. $(-\infty, -2) \cup (-2, 3]$
- B. $[-8, -2) \cup (-2, 1]$
- C. $\left[-\frac{9}{2}, -2\right) \cup (-2, 0]$
- D. $\left[-\frac{9}{2}, -2\right]$

【答案】 C

【解析】 由题意得：

$$-8 \leq 2x + 1 \leq 1,$$

$$\text{解得：} -\frac{9}{2} \leq x \leq 0,$$

$$\text{由 } x + 2 \neq 0, \text{ 解得：} x \neq -2,$$

$$\text{故函数的定义域是 } \left[-\frac{9}{2}, -2\right) \cup (-2, 0],$$

故选C.

【标注】 【素养】逻辑推理

【素养】数学抽象

【素养】数学运算

【知识点】求抽象函数的定义域

13.

已知函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 _____.

【答案】 (1) $[0, 4]$

【解析】 (1) $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，则有 $0 \leq x^2 \leq 4$ ，故 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$.

【标注】 【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域；求抽象函数的定义域

14. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ，则 $y = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 () .

A. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$

C. $[2, +\infty)$

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【答案】 A

【解析】 由 $2x - 1 \geq 0$ 得 $x \geq \frac{1}{2}$,

$$\therefore f(x) \text{ 的定义域为 } x \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}, \text{ 即 } 0 < x \leq 2,$$

$$\therefore y = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 的定义域满足：} \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

故选A.

【标注】 【知识点】复合函数；求具体函数（包括复合函数）的定义域

5. 函数相等

判断两个函数是否相等

只有当两个函数的定义域和对应关系都分别相同时，这两个函数才是同一函数

15. 下列四组函数，表示同一函数的是（ ）.

- A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$
B. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$
C. $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2}{x}$
D. $f(x) = |x+1|$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$

【答案】 D

【解析】 A，值域不同，
B，定义域不同，
C，定义域不同。
故选D。

【标注】【知识点】解析法；函数的定义域；相同函数

16. 下列各组函数表示相等函数的是（ ）.

- A. $y = \sqrt[5]{x^5}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$
B. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1 (t \in \mathbf{Z})$
C. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与 $g(x) = x + 2$
D. $y = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$

【答案】 D

【解析】 A．中两函数对应关系不同；
B．中两函数定义域不同；
C．中两函数定义域不同；
D．中两函数定义域和对应关系都相同。
故选D。

【标注】【知识点】相同函数

17. 下列各组函数中，表示同一个函数的是（ ）.

- A. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$
B. $y = x$ 与 $y = |x|$

C. $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

D. $y = \sqrt{x^2} - 1$ 与 $y = x - 1$

【答案】 C**【解析】** A项： $\because y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 1\}$ ， $y = x + 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，故不为同一函数，排除；B项： $\because y = x$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ， $y = |x|$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，故不为同一函数，排除；D项： $\because y = \sqrt{x^2} - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$ ， $y = x - 1$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ，故不为同一函数，排除。

故选C。

【标注】【知识点】求具体函数（包括复合函数）的定义域；相同函数；解析法

6. 函数的解析式求法

代入法

【备注】已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式，求 $f[g(x)]$ 的解析式常用代入法。18. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$ 。若函数 $f(x)$ 对任意实数 $t \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1+t) = f(1-t)$ 成立，求 $f(x)$ 的解析式。**【备注】**【金金备注】利用代入法去讲，答案是利用二次函数及函数对称性求解的，可以作为扩展**【答案】** (1) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 。**【解析】** (1) $\because f(1+t) = f(1-t)$ 。 $\therefore f(x)$ 图象对称轴为 $x = 1$ 。 $\therefore -\frac{a}{2} = 1$ 。 $a = -2$ 。 $\therefore$ 函数的解析式为 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 。**【标注】**【知识点】已知函数的最值求参数

待定系数法

19.

已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)] = 9x + 4$ ，求 $f(x)$ 的解析式。**【答案】** (1) $f(x) = 3x + 1$ 或 $f(x) = -3x - 2$ 。

【解析】 (1) $\because f(x)$ 是一次函数,

$$\therefore \text{设 } f(x) = ax + b (a \neq 0),$$

$$\therefore f[f(x)] = f[ax + b]$$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= ax^2 + ab + b,$$

$$\therefore f[f(x)] = 9x + 4,$$

$$\therefore a^2 = 9, ab + b = 4,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = 3x + 1 \text{ 或 } f(x) = -3x - 2.$$

【标注】【知识点】把一个函数拆成奇函数+偶函数及其应用

20. 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且满足 $f(x+1) = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$, 则 $f(x)$ 的解析式为 _____.

【答案】 $f(x) = \frac{2}{3}x + 5$

【解析】 $f(x+1) = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$
 $= \frac{2}{3}(x+1) + 5,$
 $\therefore f(x) = \frac{2}{3}x + 5.$

【标注】【知识点】用配凑法求解析式; 解析法

配凑法

已知 $f(g(x))$ 的解析式, 要求 $f(x)$ 的解析式时, 可从 $f(g(x))$ 的解析式中配凑出 $g(x)$, 即把解析式变为关于 $g(x)$ 的表达式, 然后再把解析式两边的 $g(x)$ 换为 x 即可.

补充说明: 此时需要注意 $g(x)$ 本身的范围 (值域) 就代表 $f(x)$ 的定义域.

举例: ① 已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$ 的解析式

② 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$ 的解析式

【备注】【举例答案】

① $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$, 可以将右边凑成 $(\sqrt{x}+1)^2 - 1$ 的形式再求解

② $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 可以将右边凑成 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 的形式再求解.

换元法

【备注】【教师备注】已知 $f(g(x))$ 的解析式, 要求 $f(x)$ 的解析式时, 也可以令 $t = g(x)$, 反解此方

程（即用 t 去表示 x ），将解得的结果带入到解析式中，从而求出 $f(t)$ 的解析式，再把解析式中的 t 换为 x 即可

21. 已知函数 $f(\sqrt{x} + 1) = 2x + 3$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

【解析】 $f(\sqrt{x}+1) = 2x+3 = 2(\sqrt{x}+1)^2 - 4(\sqrt{x}+1) + 5$,
故 $f(x) = 2x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$.

【标注】【知识点】复合函数；函数的定义；用换元法求解析式；解析法；求具体函数（包括复合函数）的定义域

22. 设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 1+x$, 则 $f(x)$ 的表达式为 ().

- A. $\frac{2}{1+x}$
- B. $\frac{2}{1+x^2}$
- C. $\frac{1-x^2}{1+x^2}$
- D. $\frac{1-x}{1+x}$

【答案】 A

【解析】 令 $\frac{1-x}{1+x} = t$, 则 $1-x = t+tx (t \neq -1)$,

$\therefore (1+t)x = 1-t (t \neq -1)$,

$\therefore x = \frac{1-t}{1+t}$,

$\therefore f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 1+x$,

$\therefore f(t) = 1 + \frac{1-t}{1+t} = \frac{2}{1+t}$,

$\therefore f(x) = \frac{2}{1+x} (x \neq -1)$.

综上所述, 故选A.

【标注】【知识点】用换元法求解析式；解析法

 方程组法

已知 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 满足的关系式, 要求 $f(x)$ 解析式,

可用 $g(x)$ 代替两边所有的 x ，得到关于 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 的方程组，

然后类比于**二元一次方程组解法**，消去 $f(g(x))$ 解出 $f(x)$ 即可。

举例： $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ ， $f(x)$ 与 $f(a-x)$ 时，

可将原式中的 x 用 $\pm\frac{1}{x}$ 或 $a-x$ 代替,从而得到另一个同时含有 $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(x)$ 与 $f(a-x)$ 的关系式,将两个关系式联立方程组解出 $f(x)$.

23. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - 2f(-x) = x + 2$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}x - 2$

【解析】
$$\begin{cases} f(x) - 2f(-x) = x + 2 \\ f(-x) - 2f(x) = -x + 2 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x - 2 .$$

 故答案为： $\frac{1}{3}x - 2$.

【标注】【知识点】用联立方程组法求解析式；解析法

24. 已知：函数 $f(x)$ 对一切实数 x, y 都有 $f(x+y) - f(y) = x(x+2y+1)$ 成立，且 $f(1) = 0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值 .

(2) 求 $f(x)$ 的解析式 .

【答案】 (1) $f(0) = -2$.

(2) $f(x) = x^2 + x - 2$.

【解析】 (1) 令 $x = 1, y = 0$,

$$\therefore f(1) - f(0) = 2 ,$$

$$\therefore f(0) = f(1) - 2 = -2 .$$

(2) 设 $y = 0$,

$$\therefore f(x) - f(0) = x(x+1) ,$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x - 2 .$$

【标注】【知识点】补集；交、并、补集混合运算；交集；函数的定义；解析法；用赋值消元法求解析式；二次函数相关的恒成立问题

方程组法在赋值运算中的应用

所给函数方程含有两个变量时，可对这两个变量交替用特殊值带入，或使这两个变量相等带入，再利用已知条件，可求出未知的函数。但此处的难点是取什么特殊值才对题目有效，这要根据题目特征而定。

25. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的减函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ，满足对任意 $x, y \in (-2, 2)$ ，都有

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{5-xy}\right) - f(y) .$$

求 $f(0)$ 的值 .

【答案】 (1) $f(0) = 0$.

【解析】 (1) 根据题意, 任意 $x, y \in (-2, 2)$,

$$\text{都有 } f(x) = f\left(\frac{x+y}{5-xy}\right) - f(y),$$

$$\text{令 } x = y = 0, \text{ 可得 } f(0) = f(0) - f(0) = 0,$$

$$\text{即 } f(0) = 0.$$

【标注】 【知识点】抽象函数; 解析法; 利用函数单调性解不等式; 利用定义判断函数奇偶性

26. 定义在 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $f(1) = 2$, 则 $f(-3) = (\quad)$.

A. 0

B. -2

C. 6

D. -6

【答案】 C

【解析】 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 且 $f(1) = 2$,

$$\text{令 } x = 1, y = 0, \text{ 得 } f(1) = f(1) + f(0) + 0,$$

$$\therefore f(0) = 0,$$

$$\text{令 } x = 1, y = -1, \text{ 得 } f(0) = f(1) + f(-1) - 2, \text{ 即 } 0 = 2 + f(-1) - 2,$$

$$\therefore f(-1) = 0,$$

$$\text{令 } x = -1, y = -1, \text{ 得 } f(-2) = f(-1) + f(-1) + 2 = 2,$$

$$\text{令 } x = -2, y = -2, \text{ 得 } f(-4) = f(-2) + f(-2) + 8 = 12,$$

$$\text{令 } x = 1, y = -4, \text{ 得 } f(-3) = f(1) + f(-4) - 8 = 2 + 12 - 8 = 6,$$

$$\therefore f(-3) = 6.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】解析法

27. 若函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x (x \neq 0)$, 则 $f(-2) = (\quad)$.

A. $-\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $-\frac{7}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

【答案】 D

【解析】 由题可知:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x (x \neq 0),$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(-2) = 4 \text{ ①},$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 得 } f(-2) + (-2)f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ ②},$$

$$\text{联立 ①② 可得 } f(-2) = \frac{7}{2}.$$

故选D.

【标注】【知识点】解析法；用联立方程组法求解析式

函数的实际应用

28. 刘某在网上经营一家坚果店，销售的坚果中有腰果、核桃、松子、板栗，价格依次为48元/盒、52元/盒、64元/盒、72元/盒. 为增加销量，刘某对这四种坚果进行促销：一次购买坚果的总价达到100元，顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后，刘某会得到支付款的80%. 在促销活动中，为保证刘某每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为_____.

【答案】12.5

【解析】在促销活动中，设订单总金额为 m 元，

可得 $(m - x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，

即有 $x \leq \frac{m}{8}$ 恒成立，

由题意可得 $m \geq 100$ ，

可得 $x \leq \frac{100}{8} = 12.5$ ，

则 x 的最大值为12.5.

故答案为：12.5.

【标注】【知识点】一次函数模型

29. 某桶装水经营部每天的固定成本为420元，每桶水的进价为5元，日均销售量 y （桶）与销售单价 x （元）的关系式为 $y = -30x + 450$ ，则该桶装水经营部要使日利润最大，销售单价应定为_____元.

【答案】10

【解析】设利润为 w ，则

$$w = (x - 5)y - 420$$

$$= (x - 5)(-30x + 450) - 420$$

$$= -30x^2 + 600x - 2670$$

$$\text{当 } x = -\frac{600}{2 \times (-30)} = 10 \text{ 时, } w \text{ 最大.}$$

故答案为：10.

【标注】【知识点】二次函数模型

