

01函数的定义与要素

1. 函数的定义

1.函数的定义

设 A 、 B 是两个**非空数集**，如果按照某种**确定的对应关系** f ，使对于**集合 A 中的任意一个数 x** ，在**集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应**——

那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**，记作 $f(x), x \in A$ ；

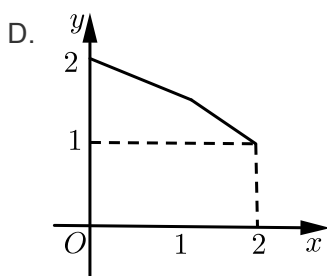
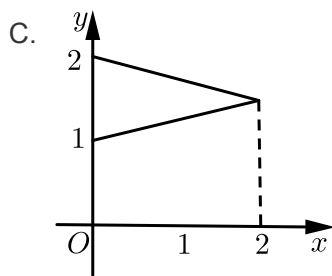
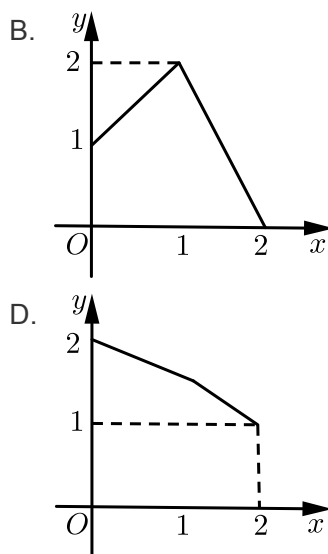
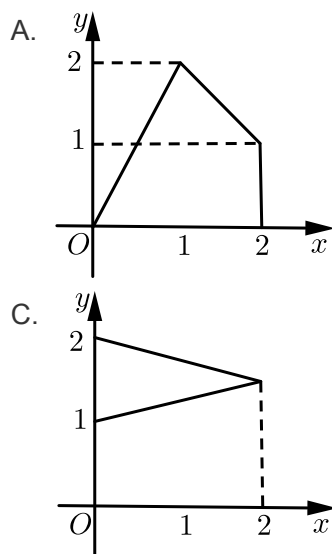
2.函数三要素

以上定义中， x 叫做**自变量**， x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**；

与 x 的值相对应的 y 值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的**值域**

定义域、值域、对应关系是函数的三要素

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $A = \{x|0 \leq x \leq 2\}$ ，值域 $B = \{y|1 \leq y \leq 2\}$ ，下列选项中，能表示 $f(x)$ 的图象的只可能是（ ）。



2. 函数的表示方法

1.解析法

用**数学表达式**表示两个变量之间的对应关系

举例： $f(x) = 3x + 5$ ；狄利克雷函数： $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

2.图象法

以自变量 x 的值为横坐标,与之对应的函数值 $f(x)$ 为纵坐标,在平面直角坐标系中描出各个点 $(x, f(x))$,这些点组成的**图形**称为函数 $y = f(x)$ 的**图象**

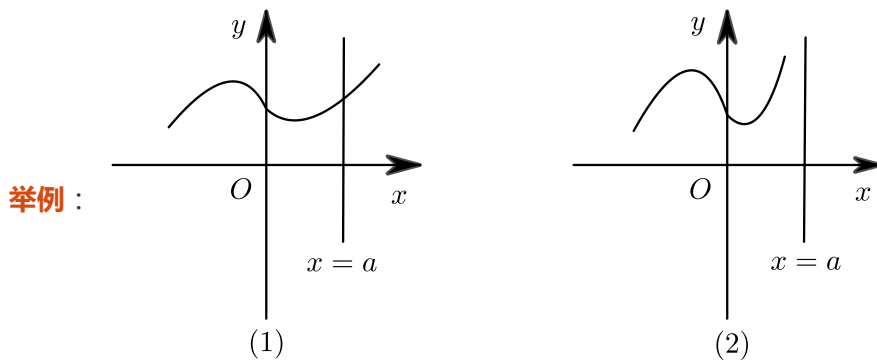


图3-1-1

3.列表法

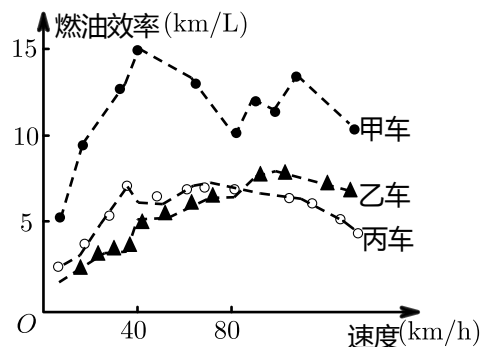
列一个两行多列的表格,第一行是自变量的取值,第二行是对应的函数值

举例：某水库的存水量 Q 与水库最深处的水深 H 的关系如下表所示：

水深 H/m	5	10	15	20	25	30	35
存水量 $Q/10^4\text{m}^3$	20	40	90	160	275	437	650

函数图像的理解

2. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程，下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况，下列叙述中正确的是（ ）。



- A. 消耗1升汽油，乙车最多可行驶5千米
- B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
- C. 甲车以80千米/小时的速度行驶1小时，消耗10升汽油
- D. 某城市机动车最高限速80千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油
3. 如图1是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图象（收支差额=车票收入-支出费用）。由于目前本条线路亏损，公司有关人员将图1变为图2与图3，从而提出了相亏为盈的两种建议。下面有4种说法：

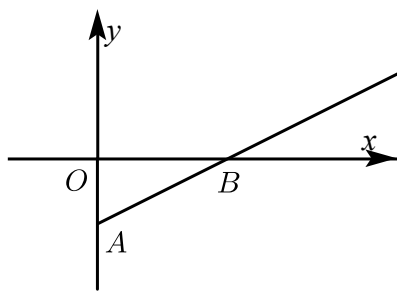


图1

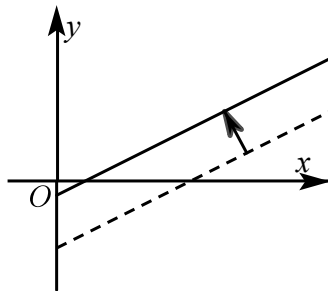


图2

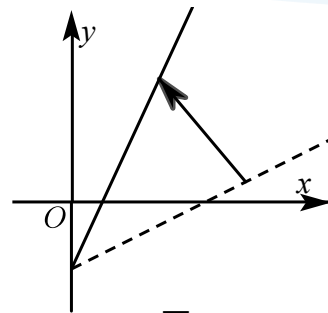


图3

①图2的建议是：减少支出，提高票价；

②图2的建议是：减少支出，票价不变；

③图3的建议是：减少支出，提高票价；

④图3的建议是：支出不变，提高票价；

上面说法中正确的是（ ）。

A. ①③

B. ①④

C. ②④

D. ②③

3. 确定函数定义域

①若 $f(x)$ 是整式，则其定义域为_____

②若 $f(x)$ 是分式，则定义域是_____

③若 $f(x)$ 是偶次根式，则定义域是_____

④ $f(x) = x^0$ 的定义域是_____

⑤若 $f(x)$ 由若干结构的代数式构成，则函数的定义域是_____

4. 函数 $f(x) = \frac{1}{2-x} + \sqrt{9-x^2}$ 的定义域为（ ）。

A. $\{x|x \neq 2\}$

B. $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$

C. $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$

D. $\{x|-3 \leq x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 2\}$

5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ 的定义域是（ ）。

A. $[-1, 1]$

B. $\{-1, 1\}$

C. $(-1, 1)$

D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

6. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是（ ）。

A. $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

D. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

7. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 的定义域为 () .

A. $(2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(-\infty, 2]$

8. 函数 $y = \frac{3}{1 - \sqrt{1-x}}$ 的定义域是 () .

A. $(-\infty, 1)$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

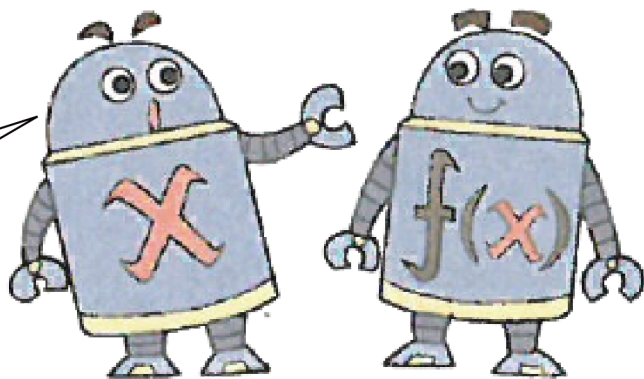
D. $[1, +\infty)$

9. 求下列函数的定义域 .

$$f(x) = \frac{(x-1)^0}{\sqrt{x+2}} .$$

4. 抽象函数定义域

不管你变成什么样子，只要是定义域就来找我！



求解抽象函数定义域的要害

①函数的**定义域永远指的是自变量x本身的范围**

②对于一道题目，同一对应法则所直接**作用的对象范围必须保持一致**

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 4)$ ，则函数 $f(2x-3)$ 的定义域 _____ .

11. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x}$ 的定义域是 _____ .

12. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域 $[-8, 1]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(2x+1)}{x+2}$ 的定义域是 () .

A. $(-\infty, -2) \cup (-2, 3]$

B. $[-8, -2) \cup (-2, 1]$

C. $\left[-\frac{9}{2}, -2\right) \cup (-2, 0]$

D. $\left[-\frac{9}{2}, -2\right]$

13.

已知函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 1]$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 _____ .

14. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ，则 $y = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 () .

A. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$

C. $[2, +\infty)$

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

5. 函数相等

判断两个函数是否相等

只有当两个函数的定义域和对应关系都分别相同时，这两个函数才是同一函数

15. 下列四组函数，表示同一函数的是（ ）.

- A. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$
B. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$
C. $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^2}{x}$
D. $f(x) = |x+1|$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$

16. 下列各组函数表示相等函数的是（ ）.

- A. $y = \sqrt[5]{x^5}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$
B. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1 (t \in \mathbf{Z})$
C. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与 $g(x) = x + 2$
D. $y = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$

17. 下列各组函数中，表示同一个函数的是（ ）.

- A. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$
B. $y = x$ 与 $y = |x|$
C. $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$
D. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 与 $y = x - 1$

6. 函数的解析式求法

代入法

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$.

若函数 $f(x)$ 对任意实数 $t \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1+t) = f(1-t)$ 成立，求 $f(x)$ 的解析式.

待定系数法

19.

已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)] = 9x + 4$ ，求 $f(x)$ 的解析式.

20. 已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $f(x+1) = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 _____.

配凑法

已知 $f(g(x))$ 的解析式，要求 $f(x)$ 的解析式时，可从 $f(g(x))$ 的解析式中配凑出 $g(x)$ ，即把解析式变为关于 $g(x)$ 的表达式，然后再把解析式两边的 $g(x)$ 换为 x 即可.

补充说明：此时需要注意 $g(x)$ 本身的范围（值域）就代表 $f(x)$ 的定义域.

举例：①已知 $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求 $f(x)$ 的解析式

②已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，求 $f(x)$ 的解析式

🔗 换元法

21. 已知函数 $f(\sqrt{x} + 1) = 2x + 3$ ，则 $f(x) =$ _____.

22. 设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 1+x$ ，则 $f(x)$ 的表达式为().

A. $\frac{2}{1+x}$
C. $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

B. $\frac{2}{1+x^2}$
D. $\frac{1-x}{1+x}$

🔗 方程组法

已知 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 满足的关系式，要求 $f(x)$ 解析式，

可用 $g(x)$ 代替两边所有的 x ，得到关于 $f(x)$ 与 $f(g(x))$ 的方程组，

然后类比于**二元一次方程组解法**，消去 $f(g(x))$ 解出 $f(x)$ 即可.

举例： $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ ， $f(x)$ 与 $f(a-x)$ 时，

可将原式中的 x 用 $\pm\frac{1}{x}$ 或 $a-x$ 代替，从而得到另一个同时含有 $f(x)$ 与 $f\left(\pm\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(x)$ 与 $f(a-x)$ 的关系式，将两个关系式联立方程组解出 $f(x)$ 。

23. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - 2f(-x) = x + 2$ ，则 $f(x) =$ _____.

24. 已知：函数 $f(x)$ 对一切实数 x, y 都有 $f(x+y) - f(y) = x(x+2y+1)$ 成立，且 $f(1) = 0$ 。

(1) 求 $f(0)$ 的值。

(2) 求 $f(x)$ 的解析式。

🔗 方程组法在赋值运算中的应用

所给函数方程含有两个变量时，可对这两个变量交替用特殊值带入，或使这两个变量相等带入，再利用已知条件，可求出未知的函数。但此处的难点是取什么特殊值才对题目有效，这要根据题目特征而定。

25. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的减函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ，满足对任意 $x, y \in (-2, 2)$ ，都有

$$f(x) = f\left(\frac{x+y}{5-xy}\right) - f(y).$$

求 $f(0)$ 的值。

26. 定义在 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ ， $f(1) = 2$ ，则 $f(-3) =$ ().

A. 0

B. -2

C. 6

D. -6

27. 若函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x(x \neq 0)$ ，则 $f(-2) =$ ().

A. $-\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $-\frac{7}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

函数的实际应用

28. 刘某在网上经营一家坚果店，销售的坚果中有腰果、核桃、松子、板栗，价格依次为48元/盒、52元/盒、64元/盒、72元/盒．为增加销量，刘某对这四种坚果进行促销：一次购买坚果的总价达到100元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，刘某会得到支付款的80%．在促销活动中，为保证刘某每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为 _____ ．
29. 某桶装水经营部每天的固定成本为420元，每桶水的进价为5元，日均销售量 y （桶）与销售单价 x （元）的关系式为 $y = -30x + 450$ ，则该桶装水经营部要使日利润最大，销售单价应定为 _____ 元．